Capitolo 5

La rovina del giocatore

5.1 Preliminari

Ricordiamo l'enunciato di due risultati generali. Il primo è il Per il Lemma 5 dell'esercizio "ABRACADABRA" (la dimostrazione si trova nell'appendice dell'Esercizio) il secondo è il classico Teorema di arrresto opzionale di Doob. La dimostrazione è identica a quella di Williams anche se le ipotesi qui enunciate sono più generali.

Fissiamo uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ e una filtrazione $(\mathcal{F})_n$ in esso.

Lemma 1. *Se τ è un tempo d'arresto per cui esistano $N \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$ tali che, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:*

$$\mathbb{P}(T_M \leq n + N | T_M > n) \geq \epsilon$$

allora $\mathbb{E}\tau < \infty$.

Teorema 2. *[Teorema di Doob dell'arresto opzionale]*

Se τ è un tempo d'arresto $\mathbb{P}$- q.c. finito, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una supermartingala e vale una delle tre ipotesi elencate sotto

- *esiste $K \in \mathbb{N}$ tale che $\mathbb{P}\{\tau \leq K\} = 1$,*
- *esiste $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $|X_{n\wedge\tau}| < Y$, $\mathbb{P}$-q.c.,*
- *$\mathbb{E}\tau < \infty$ ed esiste $M \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $|X_{n+1} - X_n| \leq M$, $\mathbb{P}$-q.c.,*

allora $\mathbb{E}X_\tau \leq \mathbb{E}X_0$.

5.1.1 Sul Tempo di uscita da un limitato delle passaggiate aleatorie

Consideriamo una successione (ξ_n) di variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite con $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(\xi_n = -1) = 1 - p$, $p \in (0, 1)$. Poniamo $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, $S_0 = 0$.

Lemma 3. *Fissato un qualsiasi $M \in \mathbb{N}$ e posto*

$$T_M := \inf\{n \ \textit{ tali che } \ |S_n| \geq M\}$$

si ha $\mathbb{E}(T_M) < \infty$

Dimostrazione. Scegliamo $N = 2M$ e notiamo che

$$\{T_M \leq n + N\} \cap \{T_M > n\} \supset \{\xi_{n+1} = 1, ..., \xi_{n+N} = 1\} \cap \{T_M > n\}$$

(infatti se $T_M > n$ si ha $S_n > -M$ e quindi $S_n + 2M > M$). Ricordando che ξ_{n+1},...,ξ_{n+N} sono indipendenti da $\mathcal{F}_n$ e che T_M è un tenmpo d'arresto (quindi $\{T_m > n\} \in \mathcal{F}_n$) si deduce che:

$$\mathbb{P}(T_M \leq n + N | T_M > n) \geq \mathbb{P}\{\xi_{n+1} = 1, ..., \xi_{n+N} = 1\} = p^N > 0$$

La tesi segue dal Lemma 1. □

5.2 Descrizione del modello

Pensiamo a un gioco casuale ripetuto tra due giocatori. Il giocatore 1 parte da un capitale b e l'avversario ha un capitale iniziale pari a a, con $a, b \in \mathbb{N}^*$. Ad ogni istante si effettua un gioco casuale. Il giocatore 1 ha probabilità p di vincere e $1 - p$ di perdere. Se vince riceve 1 euro dal giocatore 2, se perde deve dare un euro al giocatore avversario. Il gioco si ripete sempre uguale, ad ogni istante indipendentemente dagli altri e termina quando uno dei due giocatori esaurisce il suo capitale.

Per modellizzare il gioco assumiamo il punto di vista del giocatore 1. Consideriamo come sopra una successione $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite con $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(\xi_n = -1) = 1 - p$, $p \in (0, 1)$. Poniamo $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, ..., \xi_n)$ e $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, $S_0 = 0$. Le ξ_n rappresentano l'esito del gioco n-esimo e S_n è il guadagno del giocatore 1. Il giocatore 1 vince la partita se S_n raggiunge il valore a prima di raggiungere $-b$ è rovinato se S_n raggiunge il valore $-b$ prima di raggiungere a.

Siano

$$\tau^a := \inf\{n \text{ tali che } S_n \geq a\} = \inf\{n \text{ tali che } S_n = a\}$$

$$\tau_{-b} := \inf\{n \text{ tali che } S_n \leq -b\} = \inf\{n \text{ tali che } S_n = -b\}$$

$$\tau^a_{-b} = \min\{\tau^a, \tau_{-b}\} = \inf\{n \text{ tali che } S_n \geq a \vee S_n \leq -b\}$$

(in particolare il primo giocatore vince la partita se e soltanto se $\tau^a_{-b} = \tau^a$)

Osservo che se $M \geq \max\{a, b\}$,

$$\tau^a_{-b} \leq T_M := \inf\{n \text{ tali che } |S_n| \geq M\}$$

Per quanto abbiamo visto $\mathbb{E}[T_M] < \infty$, quindi $\mathbb{E}[\tau^a_{-b}] < +\infty$, pertanto τ^a_{-b} è $\mathbb{P}$-q.c. finito.

Chiamiamo $A = \{\tau^a_{-b} = \tau^a\}$ (rovina del secondo giocatore) e $B = \{\tau^a_{-b} = \tau^{-b}\}$ (rovina del primo giocatore). Per l'ultima osservazione, A e B costituiscono una partizione di Ω quindi

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1.$$

Il resto del capitolo è dedicato a determinare determinare $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)$ e la durata media della partita, ovvero $\mathbb{E}[\tau^a_{-b}]$, sia nel caso simmetrico ($p = 1/2$) che in quello asimmetrico.

5.3 Caso simmetrico: $p = 1/2$

In questo caso $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ è una martingala perché le ξ_i sono centrate e indipendenti, inoltre, $|S_{n \wedge \tau^a_{-b}}| \leq \max\{a, b\}$. Le ipotesi del teorema di Doob sono quindi soddisfatte e si ha:

$$\mathbb{E}[S_{\tau^a_{-b}}] = \mathbb{E}[S_0] = 0.$$

Scrivendo esplicitamente l'espressione di $\mathbb{E}[S_{\tau^a_{-b}}]$:

$$a\mathbb{P}(A) - b\mathbb{P}(B) = 0$$

Unendo quest'equazione a $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$ si conclude

$$\mathbb{P}(A) = b/(a + b),\ \mathbb{P}(B) = a/(a + b).$$

Per determinate il tempo medio della partita osserviamo che anche $(S_n^2 - n)$ è una martingala, infatti:

$$\mathbb{E}[S^2_{n+1} - (n + 1)|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[(S_n + \xi_{n+1})^2|\mathcal{F}_n] - (n + 1) =$$

$$= \mathbb{E}[S^2_n|\mathcal{F}_n] + 2\mathbb{E}[\xi_{n+1}S_n|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[\xi^2_{n+1}|\mathcal{F}_n] - (n + 1)$$

e per la misurabilità di S_n:

$$= S^2_n + 2S_n\mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[\xi^2_{n+1}|\mathcal{F}_n] - (n + 1)$$

e poiché ξ_{n+1} è indipendente da $\mathcal{F}_n$:

$$= S^2_n + 2S_n\mathbb{E}[X_{n+1}] + \mathbb{E}[X^2_{n+1}] - (n + 1)$$

e poiché $\mathbb{E}\,\xi_{n+1} = 0$ $\mathbb{E}\,\xi^2_{n+1} = 1$

$$= S^2_n + 1 - (n + 1) = S^2_n - n.$$

Notiamo che

$$|S^2_{n\wedge\tau^a_{-b}} - n \wedge \tau^a_{-b}| \leq S^2_{n\wedge\tau^a_{-b}} + \tau^a_{-b} \leq \max\{a, b\}^2 + \tau^a_{-b} \in L^1$$

Quindi, ancora una volta il Teorema di Doob si può applicare ottenendo

$$\mathbb{E}[S^2_{\tau^a_{-b}} - \tau^a_{-b}] = 0$$

da cui

$$\mathbb{E}[\tau^a_{-b}] = \mathbb{E}[S^2_{\tau^a_{-b}}] = a^2\mathbb{P}(A) + b^2\mathbb{P}(B) = \frac{a^2b + b^2a}{a + b} = ab$$

Vediamo ora cosa succede se $b \to \infty$. Poniamo

$$A_b = \{\tau^a_{-b} = \tau^a\} = \{\exists n \text{ t.c. } S_n = a, S_m > -b, \forall m \leq n\}.$$

E' facile verificare che

$$A_b \nearrow A_\infty := \{\exists n \text{ t.c. } S_n = a\}.$$

Per la continuità della probabilità sulle successioni monotone si ha

$$\mathbb{P}(A_\infty) = \lim_{b\to\infty} \mathbb{P}(A_b) = \lim_{b\to\infty} b/(a+b) = 1.$$

Questo significa che la passeggiata aleatoria è una catena di Markov ricorrente.

Venendo al tempo medio si ha

$$\tau^a_{-b} \nearrow \tau^a : \inf\{n \text{ tali che } S_n = a\}$$

con la solita convenzione $\inf \emptyset = +\infty$. Per convergenza dominata

$$\mathbb{E}[\tau^a] = \lim_{b\to\infty} \mathbb{E}[\tau^a_{-b}] = \lim_{b\to+\infty} ab = +\infty$$

Quindi il tempo del primo passaggio da a ha media infinita.

5.4 Caso non simmetrico

Supponiamo ora che $q := 1-p \neq p$ e consideriamo il processo

$$M_n = (q/p)^{S_n} = (q/p)^{\sum_{i=1}^n \xi_i} = \prod_{i=1}^n (q/p)^{\xi_i},\ M_0 = 1$$

E' un prodotto di v.a. indipendenti, inoltre

$$\mathbb{E}[(q/p)^{\xi_i}] = p(q/p) + q(q/p)^{-1} = q + p = 1.$$

Quindi (M_n) è una martingala non negativa. Inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$M_{n\wedge\tau} \leq \max\{(q/p)^a, (q/p)^{-b}\}$$

Le ipotesi del Lemma di Doob sono soddisfatte quindi

$$\mathbb{E}[M_{\tau^a_{-b}}] = 1.$$

Sia $\gamma = q/p$, allora

$$\mathbb{E}[M_{\tau^a_{-b}}] = \gamma^a \mathbb{P}(A) + \gamma^{-b}\mathbb{P}(B) = 1$$

e ricordando che $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$, si deduce

$$\gamma^a \mathbb{P}(A) + \gamma^{-b}(1 - \mathbb{P}(A)) = 1$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1-\gamma^{-b}}{\gamma^a - \gamma^{-b}}; \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{\gamma^a - 1}{\gamma^a - \gamma^{-b}}.$$

Venendo ora al tempo medio si nota che, in questo caso

$$\mathbb{E}[\xi_i] = p - q = 2p - 1 \neq 1$$

allora

$$L_n = \xi_1 - (2p-1) + \cdots + \xi_n - (2p-1) = S_n - n(2p-1)$$

è una martingala.

Osserviamo ora che $|L_{n+1} - L_n| \leq 1 + |2p - 1|$ e ricordiamo che $\mathbb{E}\tau^a_{-b} < +\infty$. Le ipotesi del teorema di Doob sono ancora soddisfatte e si ha:

$$\mathbb{E}[L_{\tau^a_{-b}}] = 0, \implies \mathbb{E}[S_{\tau^a_{-b}} - \tau^a_{-b}(2p-1)] = 0$$

$$\implies \mathbb{E}[\tau^a_{-b}] = 1/(2p-1)\mathbb{E}[S_{\tau^a_{-b}}]$$

$$= \frac{a}{2p-1}\frac{1-\gamma^{-b}}{\gamma^a - \gamma^{-b}} - \frac{b}{2p-1}\frac{\gamma^a - 1}{\gamma^a - \gamma^{-b}}$$

Vediamo ora il limite per $b \to \infty$ con la stessa notazione del caso simmetrico:

- se $\gamma > 1$ (cioè $q > p$) si ha $\gamma^{-b} \to 0$ e quindi

$$\mathbb{P}(A_\infty) = \lim_{b\to\infty} \mathbb{P}(A_b) = \lim_{b\to\infty} \frac{1-\gamma^{-b}}{\gamma^a - \gamma^{-b}} = \frac{1}{\gamma^a} < 1$$

  Questo significa che la passeggiata aleatoria asimmetrica non è ricorrente.

- se invece $\gamma < 1$ (cioè $q < p$) si ha $\gamma^{-b} \to \infty$

$$\mathbb{P}(A_\infty) = \lim_{b\to\infty} \frac{1-\gamma^{-b}}{\gamma^a - \gamma^{-b}} = 1$$

Per quel che riguarda il tempo medio

- per $\gamma > 1$ si noti che $\{\tau^a = +\infty\} = A^c_\infty$ quindi $\mathbb{P}(\tau^a = +\infty) > 0$ e, di conseguenza, $\mathbb{E}[\tau^a] = +\infty$.
- Per $\gamma < 1$,

$$\mathbb{E}[\tau^a] = \lim_{b\to\infty} \mathbb{E}[\tau^a_{-b}]$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{a}{2p-1}\frac{1-\gamma^{-b}}{\gamma^a - \gamma^{-b}} - \lim_{b\to\infty} \frac{b}{2p-1}\frac{\gamma^a - 1}{\gamma^a - \gamma^{-b}}$$

  Poiché $\gamma^{-b} \to \infty$ il primo limite vale $a/(2p-1)$, mentre il secondo vale 0, allora per $p > 1/2$ e $p > q$, il limite vale $a/(2p-1)$.

Conclusione: per la passeggiata aleatoria con il drift dalla parte giusta, si raggiunge a con un tempo medio finito, mentre nel caso simmetrico il valor medio del tempo di raggiungimento di a è infinito, ma la probabilità di raggiungimento è ancora pari a 1. In questo ultimo caso (tenendo conto dellla simmetria) si ha che la catena è ricorrente.