UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

SYLLABUS DEL CORSO

Matematica Generale I

1920-1-E3301M128

Obiettivi formativi

ll corso di Matematica Generale si propone di fornire le tecniche matematiche di base comunemente usate nelle applicazioni economiche. In particolare, vengono introdotti i concetti fondamentali dell'analisi matematica, sia per funzioni di una variabile sia per funzioni di più variabili.

Contenuti sintetici

0. 1.

Logica matematica; Teoria degli insiemi; Insiemi numerici; Calcolo combinatorio; Cenni di topologia in IR^n .

2.

Funzione tra insiemi A e B qualsiasi; Funzione invertibile e funzione inversa; Funzione composta; Funzioni a valori reali (B = IR); Funzioni reali di variabile reale (dom(f) ? A = B = IR); Funzioni elementari;Trasformazioni di grafici.

Limiti: definizione, teoremi e limiti notevoli; Funzioni continue e teoremi sulle funzioni continue; Calcolo differenziale e calcolo delle derivate delle principali funzioni; teoremi fondamentali sulle funzioni derivabili.

Il problema di approssimare una funzione con polinomi; Funzioni (strettamente) convesse / concave; Il problema dell'ottimizzazione libera; Punti di flesso; Studio del grafico di una funzione reale di variabile reale.

3.

Successioni numeriche; Limiti notevoli; Simboli di Landau (asintotico e *o piccolo*); Successioni infinite ed infinitesime; criteri del confronto, della radice, del rapporto.

4. Cenni sulle funzioni reali di più variabili reali.

Programma esteso

0. e 1.

Logica matematica: proposizioni, connettivi logici, tavole di verità, proposizione diretta, inversa, contronominale (dimostrazione per assurdo); il ruolo del *controesempio* per confutare un enunciato; condizione sufficiente, condizione necessaria.

Teoria degli insiemi: definizioni, operazioni insiemistiche, proprietà; quantificatori universale ed esistenziale; prodotto cartesiano di insiemi; relazioni tra due insiemi *A* e *B*, grafico di una relazione. Relazioni di equivalenza in un insieme *A*. Relazioni d'ordine in un insieme *A*, relazione d'ordine parziale o totale, insieme totalmente ordinato.

Insiemi numerici: *N*: il *Principio di induzione* e suo uso nelle dimostrazioni di proprietà dipendenti da un intero naturale. Insiemi finiti / infiniti (loro caratterizzazione). Insiemi numerabili. Da *N* a *Z*. Da *Z* a *Q*.

Calcolo combinatorio: permutazioni, combinazioni, disposizioni; loro numero; fattoriale *n!*; coefficienti binomiali .

Da *Q* a *IR*. *IR* non è numerabile (potenza del continuo). *IR* è campo totalmente ordinato. Intervalli in *IR* (limitati, illimitati, aperti, chiusi); i simboli +? e ??; intorno di un punto x_0 ? *IR*; intorno di +?, intorno di ??; intorno destro, intorno sinistro.

Definizione di maggiorante, minorante, massimo, minimo, per un sottoinsieme *A* di un insieme totalmente ordinato *X*; insieme *A* limitato superiormente / limitato inferiormente / limitato; estremo superiore / estremo inferiore di *A* in *X*.

Teorema di completezza di *IR.* Spazi euclidei IR^n ; loro rappresentazione geometrica, per $n = 1, 2, 3$. Intorno di un punto (x_0, y_0) o di *?* in IR^2 . Cenni di topologia in IR^n : punto interno, punto esterno, punto di frontiera, frontiera o bordo di un insieme; punto di accumulazione; punto isolato; insieme aperto, insieme chiuso, chiusura di un insieme.

Teorema di Bolzano/Weierstrass. Insieme compatto; insieme connesso. Caratterizzazione degli insiemi connessi in

IR.

2.

Funzione tra insiemi *A* e *B* qualsiasi (e differenza con generica relazione tra insiemi); dominio, codominio, immagine, grafico; immagine, controimmagine; funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva. Funzione invertibile e funzione inversa; condizione necessaria e sufficiente per l'invertibilità.

Funzione composta.

Caso delle funzioni a valori reali (*B* = *IR*). Funzione positiva, non negativa, negativa, non positiva; valore assoluto di una funzione; funzione limitata superiormente / funzione limitata inferiormente / funzione limitata.

Caso delle funzioni reali di variabile reale (*dom(f) ? A = B = IR*). Funzione pari, funzione dispari; funzione periodica di periodo minimo *T*. Funzione monotona (strettamente crescente / non decrescente / strettamente decrescente / non crescente); funzione (strettamente) convessa / concava; comportamento dei loro grafici; una funzione strettamente monotona è invertibile (condizione sufficiente, non necessaria, di invertibilità).

Estremo superiore (inferiore), massimo (minimo), punto di massimo (di minimo), estremanti / estremi; differenza tra *locale/relativo* e *globale/assoluto*; differenza tra *forte e debole*.

Funzioni elementari: funzioni algebriche (razionali, algebriche), funzioni trascendenti (esponenziali, logaritmiche, trigonometriche).

Traslazioni, simmetrie ed omotetie (dilatazioni / contrazioni) sulle variabili indipendenti / dipendenti; come ricavare, dal grafico di $y = f(x)$ i grafici di $y = f(x + k)$, $y = f(kx)$, $y = f(x) + k$, $y = kf(x)$ *(k ? IR)*.

Limiti: definizione generale, per funzioni tra spazi topologici (metrici).

Teorema dell'unicità del limite.

Il caso particolare degli spazi euclidei: funzioni reali di una o pi`u variabili reali.

Limite per eccesso / limite per difetto. Limiti per funzioni reali di una variabile reale: limite dalla destra / limite dalla sinistra.

I casi $lim_{x?x0}$ *f(x) = +?/ ? ?/?* (asintoti verticali) e $lim_{x?+?/??/?}$ *f(x) = l ? IR* (asintoti orizzontali). Teoremi e risultati generali sui limiti: Comportamento dell'operazione di limite rispetto all'ordinamento: teorema della permanenza del segno; teorema di locale limitatezza; teorema del confronto o dei due carabinieri (sua applicazione, p.e.: la funzione *f(x) = sin x /x* , la famiglia di funzioni *f(x) = x* $^{?}$ *sin(1/ x), ? ? 0)*; teorema del limite per funzioni monotone; esempi: limiti per funzioni potenza, esponenziale, logaritmo, loro grafici. Comportamento dell'operazione di limite rispetto all' operazione di composizione: teorema del limite di funzione composta (cambio di variabile).

Comportamento dell’operazione di limite rispetto alle operazioni algebriche; calcolo del limite nel caso di potenze, esponenziali, logaritmi; come trasformare esponenziali e logaritmi con base variabile in esponenziali e logaritmi con base fissa; forme di indecisione. Il caso delle funzioni razionali $f(x) = P_n(x)\ Q_m(x)$.

Infiniti ed infinitesimi; stesso ordine/ordine superiore/ordine inferiore/non comparabili; loro utilizzo nel calcolo dei limiti.

I simboli di Landau ? (asintotico) e o (o piccolo); proprietà; loro utilizzo, nel calcolo dei limiti.

Primo cenno alle successioni: definizione di successione numerica; relazione tra limite di funzione *limx->x0 f(x)* e limiti di successioni $lim_{n?+?}$ *f(an)*, con *an ? x0*; il numero di Nepero (coppia di successioni convergenti).

Limiti notevoli e loro uso nel calcolo dei limiti.

Asintoti obliqui; come determinarli; condizione necessaria e sufficiente, condizione solo necessaria.

Funzioni continue: definizione di continuità (in generale).

Il caso delle funzioni reali di variabile reale: punti di continuità, continuità dalla destra / dalla sinistra, punti di discontinuità; tipi di discontinuità.

Funzioni continue reali di variabile reale: esempi (funzioni elementari). Il caso delle funzioni monotone (tipo di discontinuità e loro numero). Comportamento della proprietà di continuità rispetto a:

– prodotto di composizione (teorema sulla funzione composta);

– operazioni algebriche sul codominio (spazio vettoriale $C^0(A)$ delle funzioni a valori reali, continue in un insieme *A*);

– ordinamento sul codominio: teorema di permanenza del segno; teorema degli zeri

- procedimento di dicotomia per la determinazione approssimata di una radice della funzione; proprietà di Darboux o dei valori intermedi; teorema di Darboux o dei valori intermedi.

I teoremi fondamentali delle funzioni continue:

– il teorema di Weierstrass (l’immagine di un compatto è compatto); caso delle funzioni continue a valori reali (una funzione continua su un insieme chiuso e limitato è limitata ed ammette massimo e minimo).

– il teorema di Darboux o dei valori intermedi (l’immagine di un connesso è connesso); caso delle funzioni continue a valori reali (una funzione continua su un intervallo ha la proprietà dei valori intermedi).

Teorema degli zeri in generale, per funzioni a valori reali, e sua applicazione alla determinazione del luogo dei punti ove una funzione continua di una o più variabili è positiva, o negativa.

Calcolo differenziale per funzioni *f : I ? IR ? IR:*

Definizione di rapporto incrementale, definizione di derivata, significato geometrico; equazione della retta tangente; punti a tangente verticale, punti angolosi, cuspidi; la derivabilità implica la continuità; proprietà della funzione derivata *f '* nei casi *f* pari / *f* dispari.

Calcolo delle derivate delle principali funzioni.

Algebra delle derivate: comportamento dell'operazione di derivazione rispetto alle operazioni algebriche sul codominio.

Derivata della funzione composta; derivata della funzione inversa. Derivate successive, spazi vettoriali $C^1(I)$, $C^n(I)$ e $C^?(I)$.

I teoremi fondamentali sulle funzioni derivabili: Fermat, Rolle, Cauchy, Cavalieri–Lagrange (o dell'incremento finito).

Differenziale primo, significato geometrico. Le due forme dell'incremento finito. Conseguenze dei teoremi fondamentali sulle funzioni derivabili: caratterizzazione delle funzioni costanti e delle funzioni monotone; analisi dei punti stazionari.

La funzione derivata, sue proprietà (caso in cui esiste il limite della derivata); teorema di de L'Hopital.

Il problema di approssimare una funzione con polinomi: formula di Taylor e di Mac Laurin; resti nella forma di Peano e di Lagrange; formula di Mac Laurin per le principali funzioni. Applicazioni della formula di Taylor - Mac Laurin al calcolo dei limiti e alla determinazione della natura dei punti stazionari.

Funzioni (strettamente) convesse / concave; proprietà delle funzioni convesse / concave; caratterizzazione di tali funzioni tramite *f '* (conseguenza: un punto stazionario `e punto di minimo / massimo globale); caratterizzazione di tali funzioni tramite *f ''*; punti di flesso ascendente / discendente; come determinarli.

Il problema dell'ottimizzazione libera: condizione necessaria del primo ordine; condizione sufficiente del secondo ordine.

Punti di flesso: condizione necessaria, in caso di funzione derivabile due volte.

Studio del grafico di una funzione reale di variabile reale; schema.

Esempi ed esercizi sullo studio di funzione e sull' ottimizzazione libera.

3.

Successioni numeriche: successioni convergenti, divergenti, irregolari; successioni monotone. Limiti e operazioni algebriche; forme di indecisione; coppia di successioni convergenti (esempio, il numero di Nepero); limiti notevoli. Simboli di Landau (asintotico e *o piccolo*); successioni infinite ed infinitesime; criteri del confronto, della radice, del rapporto. Formula di Eulero - Mascheroni. Successioni definite per ricorrenza.

4.

Cenni sulle funzioni reali di più variabili reali: $f : dom(f)$? $IR^2(IR^n)$? IR.

Esempi, grafici, curve o linee di livello; limiti; continuità; derivate parziali, significato geometrico; vettore gradiente; differenza tra i concetti di *differenziabilità* in (x_0, y_0) e *derivabilità* parziale in (x_0, y_0) (differenza tra $n = 1$ e $n > 1$); la differenziabilità in (x_0, y_0) implica la continuità in (x_0, y_0) (ma non vale il viceversa); condizione sufficiente per la differenziabilità in (x_0, y_0).

Prerequisiti

Costituiscono prerequisiti **indispensabili**, per la comprensione del corso, tutti gli argomenti elencati nel Syllabus-prerequisiti (riportato in dettaglio nella pagina Elearning del corso), e relativi alla prova di ammissione al corso di laurea.

Gli argomenti sono:

- strutture numeriche

- algebra elementare, equazioni, disequazioni

- teoria degli insiemi; elementi di logica

- geometria analitica

- fondamenti di trigonometria

Metodi didattici

Lezioni frontali in aula.

Esercitazioni frontali in aula.

Tutoraggi frontali in aula.

Modalità di verifica dell'apprendimento

L’esame consiste in una prova scritta ed una eventuale prova orale.

La **prova scritta** consiste in due parti, da svolgersi nello stesso momento:

parte 1: alcuni test, ognuno con quattro risposte, di cui una ed una sola è corretta.

parte 2: domande aperte da sviluppare, sia di teoria, sia di esercizi (nella correzione, si terrà conto anche della correttezza dei termini usati, dei simboli e della notazione matematica, nonché delle regole di ortografia, grammatica e sintassi. Gli studenti stranieri possono decidere di sostenere l'esame in lingua inglese).

Se la parte 2 è gravemente insufficiente, lo studente `e respinto, qualsiasi sia il risultato nella parte 1.

La **prova orale** si svolge in data successiva a quella della prova scritta; l’orale è in gran parte teorico e verte sull'intero programma.

Testi di riferimento

Per i prerequisiti indispensabili:

0. **Allevi-Bertocchi-Birolini-Carcano-Moreni:** Manuale modulare di Metodi Matematici, Giappichelli Editore; Modulo 1: Calcolo; Modulo 2: Insiemi e spazi numerici.

Per il corso:

1. **Allevi-Bertocchi-Birolini-Carcano-Moreni**: Manuale modulare di Metodi Matematici, Giappichelli Editore; Modulo 2: Insiemi e spazi numerici; Modulo 3: Funzioni reali di una variabile reale.

2. Abbinato al Manuale Modulare di Metodi Matematici: Eserciziario, a cura di **Melania Papalia;** Giappichelli Editore.

3. **G.Carcano,** Matematica Generale; funzioni reali di variabile reale, dai limiti allo studio del grafico. Test ed esercizi con richiami teorici. Editore Datanova, Milano, 2000.

4. **G.Carcano**: è disponibile, gratis, nella pagina Elearning del corso,

un eserciziario con ampi richiami teorici (ora fuori commercio),

nel quale sono contenuti tutti gli argomenti del corso (e molto altro).