

## SYLLABUS DEL CORSO

### Calcolo delle Probabilità

1920-3-E3501Q014

---

#### Obiettivi

L'insegnamento si propone di fornire allo studente gli strumenti e i concetti di base del calcolo delle probabilità, illustrandone alcune applicazioni. Al termine del corso lo studente avrà acquisito le seguenti:

- *conoscenze*: linguaggio, definizioni ed enunciati dei risultati fondamentali della teoria della probabilità;
- *competenze*: comprensione operativa delle principali tecniche dimostrative;
- *abilità*: capacità di applicare le nozioni teoriche per la risoluzione di esercizi e l'analisi di problemi.

#### Contenuti sintetici

1. Spazi di probabilità
2. Variabili aleatorie
3. Convergenza e teoremi limite
4. Introduzione alle catene di Markov
5. Esempi di modelli probabilistici

#### Programma esteso

1. *Spazi di probabilità*
  - Introduzione alla probabilità: modelli matematici per un esperimento aleatorio

- Assiomi della probabilità
- Proprietà di base della probabilità, c....
- Calcolo combinatorio e spazi di probabilità uniformi
- Probabilità condizionale, teorema di Bayes
  
- Indipendenza di eventi, prove ripetute e indipendenti

## 2. Variabili aleatorie

- Richiami di teoria della misura
- Distribuzioni notevoli sulla retta reale, discrete e continue
- Variabili aleatorie
- Leggi marginali e legge congiunta
- Indipendenza di variabili aleatorie
- Trasformazioni di variabili aleatorie
- Valore medio, varianza e covarianza
  
- Spazi  $L^p$ , disuguaglianze (Jensen, Cauchy-Schwarz, Hölder)
- Coefficiente di correlazione e regressione lineare (cenni)

## 3. Convergenza e teoremi limite

- Richiami sui teoremi di convergenza in teoria dell'integrazione
- Lemma di Borel-Cantelli
- Legge debole e forte dei grandi numeri
  
- Nozioni di convergenza per successioni di variabili aleatorie (q.c., in probabilità, in  $L^p$ )
- Convergenza debole di probabilità, convergenza in legge di variabili aleatorie
- Legge dei piccoli numeri (convergenza della distribuzione binomiale alla Poisson)
- Teorema limite centrale attraverso il principio di Lindeberg
- Teorema limite centrale attraverso le funzioni caratteristiche (cenni)
  
- Il metodo dell'approssimazione normale
- Indipendenza di sigma-algebre, legge 0-1 di Kolmogorov

## 4. Introduzione alle catene di Markov

- Introduzione ai processi stocastici, leggi finito-dimensionali
- Catene di Markov, matrice di transizione, proprietà di Markov
- Stati ricorrenti e transitori, misure invarianti e reversibili
- Teoremi di convergenza (cenni): teorema di convergenza all'equilibrio, legge dei grandi numeri
- Probabilità di assorbimento (cenni)
  
- Passeggiate aleatorie su grafi (cenni)

## 5. Esempi di modelli probabilistici (presentati in parallelo alla teoria)

- Paradossi classici (compleanni, Monty-Hall, Borel, Bertrand)
- Permutazioni aleatorie e punti fissi
- Proprietà di concentrazione del volume in alte dimensioni
- Il teorema di approssimazione di Weierstrass e la legge dei grandi numeri
- Simulazione di variabili aleatorie, il metodo Monte Carlo
- La passeggiata aleatoria semplice in una e più dimensioni
- Rovina del giocatore
- L'algoritmo PageRank

## Prerequisiti

Le conoscenze, competenze e abilità impartite negli insegnamenti dei primi due anni, in particolare *Algebra Lineare*, *Analisi 1 e 2*, *Teoria della Misura*.

## Modalità didattica

Lezioni ed esercitazioni frontali in aula, articolate in:

- lezioni teoriche (10 cfu) in cui si fornisce la conoscenza di definizioni, risultati ed esempi rilevanti, in parallelo alle competenze relative alla loro comprensione;
- esercitazioni (2 cfu) in cui si forniscono abilità necessarie per applicare le conoscenze e competenze teoriche alla risoluzione di esercizi.

Corso erogato in lingua italiana.

## Materiale didattico

### *Libri di riferimento*

- F. Caravenna, P. Dai Pra. *Probabilità. Un'introduzione attraverso modelli e applicazioni*. Springer-Verlag Italia, Milano (2013).
- D. Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge University Press (1991).

### *Altro materiale didattico (disponibile sulla pagina e-learning del corso)*

- Dispense del docente su argomenti specifici
- Fogli di esercizi settimanali (con soluzioni dettagliate)
- Testi delle prove scritte degli anni passati (con soluzioni dettagliate)
- Elenco delle dimostrazioni per la prova orale

## Periodo di erogazione dell'insegnamento

Terzo anno, primo semestre

## Modalità di verifica del profitto e valutazione

Prova scritta - o prove parziali - e prova orale, con le modalità descritte qui sotto. Gli aspetti valutati in ciascuna prova sono l'esattezza delle risposte, la creatività, la precisione, la chiarezza espositiva. Ci saranno 5 appelli d'esame (due a febbraio, uno a giugno, uno a luglio, uno a settembre).

- La *prova scritta* ha una durata di tre ore e riceve una valutazione in trentesimi. Nella prova vengono valutate abilità pratiche (soluzione di esercizi) oltre che conoscenze e competenze teoriche (definizioni, esempi e controesempi). La prova scritta risulta superata col punteggio minimo di 15/30 e permette di accedere alla prova orale.
- A metà e alla fine del corso sono previste due *prove parziali scritte*, della durata di un'ora e mezza ciascuna, valutate in quindicesimi. Il superamento di entrambe le prove parziali col punteggio minimo di 7,5/15 equivale al superamento della prova scritta (con la "somma" dei punteggi ottenuti) e permette di accedere alla prova orale.
- La *prova orale* ha una durata di 30-45 minuti e riceve una valutazione in trentesimi. \_\_\_\_\_ Nella prova viene valutata la conoscenza di una selezione di dimostrazioni e la conoscenza operativa delle nozioni del corso. La prova orale risulta superata col punteggio minimo di 15/30.
- La valutazione finale risulta dalla media delle valutazioni della prova scritta e della prova orale. L'esame risulta superato col punteggio minimo di 18/30.

*Esonero dalla prova orale.* Chi supera la prova scritta con un punteggio compreso tra 20/30 e 27/30 può rinunciare a sostenere la prova orale, registrando il voto ottenuto nella prova scritta; con un punteggio superiore a 27/30 è ancora possibile rinunciare a sostenere la prova orale, ma in questo caso il voto registrato sarà di 27/30; infine, con un punteggio inferiore a 20/30, è necessario sostenere la prova orale.

## Orario di ricevimento

Fissato all'inizio del corso e riportato sulla pagina e-learning.

---