

## COURSE SYLLABUS

### Geometry II

1920-2-E3501Q011

---

#### Obiettivi

Lo scopo dell'insegnamento è introdurre la teoria e l'utilizzo delle forme differenziali e della loro integrazione nel contesto degli spazi euclidei e dei loro sottoinsiemi aperti, come premessa della generalizzazione alle varietà differenziali.

Le forme differenziali sono uno strumento pervasivo e di importanza fondamentale in Geometria, Topologia Differenziale e Analisi. La teoria verrà sviluppata dai suoi principi primi algebrici, ossia dalla nozione di tensore in algebra lineare.

I risultati di apprendimento attesi includono:

- **Conoscenze:** la conoscenza e la comprensione delle definizioni e degli enunciati fondamentali, nonché delle strategie di dimostrazione basilari utilizzate nella teoria delle forme differenziali; la conoscenza e la comprensione di alcune sue applicazioni, in particolare allo studio di mappe lisce proprie tra aperti in spazi euclidei e del loro grado; la conoscenza e la comprensione di alcuni esempi chiave in cui si esplica la teoria;
- **Capacità:** la capacità di applicare le conoscenze astratte acquisite alla risoluzione di semplici esercizi di calcolo e problemi teorici, richiamando in modo corretto e conseguente i risultati utilizzati; la capacità di maneggiare il calcolo algebrico, differenziale e integrale delle forme differenziali e di utilizzarlo nello studio di alcune semplici situazioni concrete, quali lo studio di mappe proprie; la capacità di applicare il bagaglio concettuale appreso alla costruzione e discussione di esempi concreti e alla risoluzione di esercizi; la capacità di esporre, comunicare e argomentare in modo chiaro, pertinente e preciso i contenuti teorici del corso.

## Contenuti sintetici

Algebra multilineare alternante; forme differenziali sullo spazio euclideo e loro operazioni; Lemma di Poincaré; applicazioni alla fisica; integrazione; cambiamento di variabili; grado di una mappa liscia propria tra aperti euclidei e sue applicazioni; Teoremi di Gauss-Green e Stokes; teoria di De Rham (brevi cenni).

## Programma esteso

Algebra esterna di uno spazio vettoriale e sue operazioni; prodotto esterno e contrazioni; spazi vettoriali orientati euclidei e loro elementi di volume; campi vettoriali e forme differenziali; differenziale esterno; forme chiuse e forme esatte; numero di avvolgimento e applicazioni; gradiente, rotore, divergenza; forme differenziali e mappe lisce: tirato-indietro; integrazione; integrazione e omotopia; formula del cambiamento di variabili; Lemma di Poincaré; Lemma di Poincaré a supporto compatto; integrazione su sottovarietà orientate; Teoremi di Gauss-Green e Stokes; grado di una mappa liscia propria tra aperti di uno spazio euclideo e tecniche di calcolo; invarianza per omotopie proprie lisce; applicazioni: il Teorema Fondamentale dell'Algebra e il Teorema del Punto Fisso di Brouwer.

## Prerequisiti

Il contenuto dei corsi di Geometria I, di Analisi I e (in parte) II, di Algebra Lineare e Geometria.

## Modalità didattica

Lezioni frontali: 6 cfu; esercitazioni: 2 cfu.

## Materiale didattico

Testi di riferimento: \_\_\_\_\_

Lecture consigliate:

un testo particolarmente attinente al contenuto del corso è il seguente:

- \_\_\_\_\_

Altre letture consigliate sono:

- M. Do Carmo, Differential forms and applications, Springer Verlag 1996;
- V. Guillemin, A. Pollack, Differential Topology 1974;
- W. Fulton, Differential Topology, a first course, Springer Verlag 1995.

## **Periodo di erogazione dell'insegnamento**

Il semestre

## **Modalità di verifica del profitto e valutazione**

MODIFICA AL PROCESSO DI VERIFICA:

In ragione dell'emergenza sanitaria in corso, gli appelli verranno svolti da remoto mediante la piattaforma WEBEX. Verrà mantenuta la struttura generale di una prova pratica e una teorica come descritto sotto, seppure più brevi di quelle usuali, con l'aggiunta tuttavia di un successivo colloquio riepilogativo; quest'ultimo si baserà su una discussione delle prove scritte ed eventuali approfondimenti. La data del colloquio verrà resa nota dopo la seconda prova scritta.

---

### MODALITA' STANDARD

Durante lo svolgimento del corso, verranno offerte due prove scritte in itinere, attinenti alla prima metà e alla seconda metà del corso rispettivamente. Ogni prova in itinere consisterà di una combinazione flessibile ma bilanciata di esercizi computazionali e di domande teoriche. Gli esercizi computazionali e le domande teoriche di ciascuna prova in itinere sono sulla falsariga di quanto viene proposto nelle prove pratiche e teoriche degli appelli regolari (vedasi descrizione qui sotto), salvo essere incentrati su una sola metà del corso.

Le due prove in itinere contribuiranno in egual misura alla formazione del voto finale. Per superare l'esame mediante le prove in itinere, lo studente deve ottenere la sufficienza (18/30) in entrambe.

Gli studenti che non superano l'esame mediante le prove in itinere potranno sostenere gli appelli regolari, ciascuno dei quali consiste di due prove scritte, una 'pratica' e una 'teorica'. Ciascuna delle due prove scritte degli appelli regolari verte sull'intero programma del corso. Nella prova pratica, verranno sottoposti agli studenti degli esercizi computazionali, mentre nella prova teorica verranno proposte delle domande su definizioni, enunciati di teoremi, dimostrazioni, costruzione di esempi e controesempi e semplici problemi teorici.

Nelle prove pratiche verrà valutata la capacità dello studente di maneggiare con padronanza e precisione il formalismo introdotto e di utilizzarlo per eseguire semplici calcoli, nonché di mettere all'opera le conoscenze teoriche trasmesse, richiamandole in modo preciso e pertinente.

Nelle prove teoriche verranno valutate la conoscenza e la comprensione dell'impianto concettuale del corso, nonché la capacità di organizzare in modo lucido, efficace e ben strutturato un'esposizione coerente e puntuale.

Per superare l'esame negli appelli regolari, lo studente deve prima superare una prova pratica, ottenendo una votazione di almeno 18/30, quindi ottenere la sufficienza di 18/30 anche nella prova teorica del medesimo appello ovvero, a sua scelta, dell'appello immediatamente successivo. La prova pratica e quella teorica concorrono in egual misura al voto finale.

A ogni esercizio/quesito (o problema) teorico di ciascuna prova verrà attribuito un punteggio parziale massimo, in ragione della sua difficoltà e lunghezza; nella valutazione dello studente verrà assegnato un punteggio in corrispondenza di ogni esercizio/quesito (o problema) teorico non superiore a quello massimo previsto, in ragione dell'esattezza, della completezza, del rigore, della chiarezza e dell'organicità dello svolgimento.

La durata di ciascuna prova è generalmente di tre ore.

## **Orario di ricevimento**

Su appuntamento (eventuali ricevimenti avranno luogo via WEBEX)

---