



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

## SYLLABUS DEL CORSO

### Teoria della Misura

1920-2-E3501Q053

---

#### Obiettivi

##### Obiettivi formativi

**Competenze:** Gli studenti devono acquisire una buona conoscenza di base delle idee, delle tecniche e delle applicazioni della teoria della misura e dell'integrazione.

**Capacità:** Gli studenti dovranno capire e saper esporre, con proprietà di linguaggio e rigore, le definizioni, i teoremi e le dimostrazioni principali. Dovranno inoltre saper usare quanto appreso per risolvere gli esercizi e i problemi proposti durante il corso e all'esame. Infine dovranno essere pronti ad applicare le idee e le tecniche imparate in questo corso ai numerosi altri ambiti matematici e scientifici in cui esse giocano un ruolo.

#### Contenuti sintetici

- Problemi dell'integrale di Riemann rispetto al passaggio al limite.
- Algebre, sigma-algebre e misure. Funzioni misurabili.
- Misure esterne, premisure, teorema di estensione. Misure di Borel e Lebesgue.

- Integrazione astratta. Teoremi di convergenza
- Integrazione in più variabili. Teorema di Fubini-Tonelli. Cambio di variabili.
- Completezza di  $L^1$ .

## Programma esteso

1. Integrale di Riemann (richiami). Sue limitazioni e i problemi con il passaggio al limite. Necessità di un integrale più adatto alle operazioni di limite. Una strategia e un ostacolo, l'insieme di Vitali.
2. Teoria della misura astratta. Algebre, sigma-algebre e misure. Proprietà di base ed esempi. Misure complete. La sigma-algebra di Borel. Sigma-algebra prodotto. Funzioni misurabili. Funzioni semplici. Misurabilità del limite puntuale di una successione di funzioni misurabili. Funzioni misurabili come limite puntuale di funzioni semplici.
3. Come costruire le misure "importanti". Misure esterne. Una procedura standard per costruire misure esterne. Condizione e teorema di Caratheodory. Premisure e teorema di estensione. Misure di Borel e di Lebesgue.
4. Integrazione astratta. Definizione di integrale per le funzioni non negative. Teorema di convergenza monotona, Lemma di Fatou. Integrazione delle funzioni a valori complessi. Teorema di convergenza dominata.
5. Integrazione in più variabili. Teorema di Fubini-Tonelli. Cambio di variabili.
6. Completezza di  $L^1$ .

## Prerequisiti

I corsi di Analisi I e II. È utile una buona conoscenza della topologia generale e una certa familiarità con l'algebra.

## Modalità didattica

Lezioni frontali.

## Materiale didattico

Appunti del docente, temi d'esame e materiale didattico degli anni precedenti.

Principale testo di riferimento: Folland, Real Analysis, Wiley

Altri testi:

- Ambrosio - Da Prato - Mennucci, Introduction to Measure Theory and Integration, Edizioni della Normale.
- Rudin, Real and Complex Analysis,
- Stein - Shakarchi, Real Analysis, Measure Theory, Integration and Hilbert spaces, Princeton

## **Periodo di erogazione dell'insegnamento**

Secondo semestre. Marzo-Giugno 2019.

## **Modalità di verifica del profitto e valutazione**

L'esame consiste di uno scritto composto da esercizi il cui scopo è di verificare la conoscenza della disciplina e la capacità di utilizzarla per risolvere problemi, e di un orale in cui si discuterà lo scritto, si verificherà la conoscenza dei teoremi principali e delle loro dimostrazioni nonché la capacità di esporli in modo chiaro. E' necessario superare lo scritto per essere ammessi all'orale. Lo scritto si considera superato se si ottiene un voto almeno pari a 18. In tal caso si può sostenere la prova orale anche in un appello successivo, purchè all'interno dell'anno accademico. Si viene ammessi all'orale anche con i voti 15, 16, 17, ma in tal caso si dovrà affrontare la prova orale nello stesso appello.

Per superare l'esame lo studente dovrà conoscere e saper usare i teoremi, avere un quadro sufficientemente chiaro e preciso della teoria astratta della misura e dell'integrazione e delle misure di Borel e Lebesgue in una e più dimensioni. Il voto sarà tanto più alto quanto meglio lo studente saprà enunciare, usare e dimostrare i teoremi più importanti.

La prova scritta e quella orale concorrono in uguale misura nella determinazione del voto finale.

Nel corso dell' anno accademico sono previsti sei appelli d'esame: giugno, luglio, settembre, novembre, febbraio/marzo, aprile.

## **Orario di ricevimento**

Per appuntamento, preferibilmente il giovedì dalle 14.00 alle 16.00

---