UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

SYLLABUS DEL CORSO

Analisi Matematica I

2021-1-E3001Q033

Obiettivi

- Conoscere e comprendere i concetti di base e la teoria, sviluppata in modo rigoroso, dell'Analisi Matematica moderna per funzioni di una variabile reale.
- Acquisire una padronanza dei contenuti e delle tecniche tale da permettere la soluzione di problemi e la loro applicazione a contesti diversi.
- Acquisire la capacità di elaborazione critica e autonoma dei concetti fondamentali appresi.
- Essere in grado di esporre in modo preciso, rigoroso ad esaustivo sia le conoscenze teoriche acquisite che le soluzioni, sviluppate in autonomia, di esercizi e problemi.
- Acquisire i prerequisiti necessari per la comprensione dei contenuti dei successivi corsi erogati all'interno del Corso di Laurea in Matematica.

Contenuti sintetici

Numeri reali e complessi. Funzioni reali di variabile reale: limiti, continuità, calcolo differenziale, calcolo integrale. Successioni e serie numeriche.

Programma esteso

1. **I numeri naturali.** Assiomi di Peano e il principio di induzione matematica. Simboli di sommatoria, produttoria e fattoriale, coefficienti binomiali, sviluppo della potenza n–esima del binomio (formula del binomio di Newton)**.**
2. **I numeri reali.** Campi, campi ordinati e i numeri razionali. Completezza e assioma di continuità. Incompletezza dei numeri razionali. Definizione assiomatica dei numeri reali. Cenni alle sezioni di Dedekind. I numeri naturali come sottoinsieme dei numeri reali. Proprietà archimedea. Estremo superiore/inferiore e loro proprietà. Esistenza dell’estremo superiore/inferiore. Esistenza e unicità delle

radici n–esime. Rappresentazione binaria e rappresentazione decimale. Parte intera e modulo di un numero reale. Definizione di potenza con esponente naturale, intero, razionale e reale.

3. **I numeri complessi.** Definizione, forma algebrica, modulo, complesso coniugato, parte reale e parte immaginaria, disuguaglianza triangolare. Forma trigonometrica ed esponenziale di un numero complesso, prodotto e potenza in forma trigonometrica/esponenziale. Funzione esponenziale ed esponenziale complesso. Radici di un numero complesso. Teorema fondamentale dell'algebra (solo enunciato).

4. **Topologia della retta reale.** Definizione di distanza sulla retta reale, intorni, punti interni, esterni e di frontiera. Insiemi aperti e chiusi. Punti di accumulazione e isolati. Densità dei numeri razionali nei numeri reali. Teorema di Bolzano–Weierstrass.

5. **Funzioni.** Definizione, dominio, codominio, immagine e controimmagine. Funzioni iniettive, suriettive e biunivoche. Funzione composta, funzione inversa, restrizione. Insiemi numerabili. Numerabilità dei numeri razionali e non numerabilità dei numeri reali. Funzioni reali di variabile reale e loro grafico. Funzioni monotone, estremo superiore e inferiore, massimo e minimo, punti di massimo e di minimo. Funzioni elementari e loro grafici (richiami sulle potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche e le loro inverse, valore assoluto, parte intera, parte frazionaria, segno).

6. **Limiti.** Definizione di limite, esempi e proprietà: unicità del limite, teorema della permanenza del segno, teorema del confronto (dei due carabinieri). Limite della somma, del prodotto, del rapporto e della funzione composta. Forme indeterminate. Limiti notevoli. Limiti destri e sinistri. Teorema di esistenza del limite per funzioni monotone. Asintotico, simboli di o piccolo e O grande. Infiniti, infinitesimi e loro confronto.

7. **Successioni in campo reale.** Successioni e limiti di successioni. Limitatezza delle successioni convergenti. Sottosuccessioni. Ogni successione limitata ha una una sottosuccessione convergente. Insiemi compatti. Compattezza degli insiemi chiusi e limitati (Heine-Borel). Successioni monotone e definizione del numero *e* (costante di Nepero). Criterio di Cauchy, limite inferiore, limite superiore e loro proprietà.

8. **Continuità.** Definizione di funzione continua. Continuità della funzione composta. Teorema della permanenza del segno. Teorema degli zeri. Teorema dei valori intermedi. Continuità della funzione inversa. Continuità delle funzioni elementari: potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche e funzioni trigonometriche inverse. Teorema ponte. Teorema di Weierstrass. Continuità uniforme. Continuità uniforme di funzioni continue su compatti (Heine–Cantor). Punti di discontinuità. Funzioni Lipschitziane.

9. **Serie.** Definizione. Serie convergenti, divergenti e indeterminate. Serie geometrica e serie telescopiche. Condizione necessaria per la convergenza. Serie assolutamente convergenti e criterio della convergenza assoluta. Serie a termini positivi: criterio del confronto e del confronto asintotico, criterio della radice e criterio del rapporto. Serie a termini di segno alterno: criterio di Leibniz.

10. **Calcolo differenziale.** Retta tangente al grafico di una funzione. Derivabilità. Derivata destra e sinistra. Punti angolosi, punti a tangente verticale e cuspidi. Continuità delle funzioni derivabili. Regole di derivazione: somma, prodotto, quoziente e derivata della funzione composta. Derivata della funzione inversa. Derivata delle funzioni elementari. Punti di massimo e di minimo, relativi e assoluti. Teoremi di Fermat e di Rolle. Teorema di Lagrange e suoi corollari: le funzioni a derivata nulla su intervalli sono costanti, lipschitzianità delle funzioni a derivata limitata, relazioni tra monotonia di una funzione e segno della sua derivata. Teorema di Cauchy. Teorema di De l'Hôpital. Teorema del limite della derivata. Convessità/concavità di una funzione. Relazione tra il segno della derivata seconda e concavità/convessità di una funzione. Posizione del grafico rispetto alle sue rette tangenti. Punti di flesso. Formule di Taylor e di Maclaurin con resto in forma di Peano ed esempi. Formula di Taylor con resto in forma di Lagrange.

11. **Calcolo integrale.** Funzioni a scala (o costanti a tratti o semplici) e integrale di funzioni a scala. Proprietà dell'integrale delle funzioni a scala. Integrale inferiore e integrale superiore su un intervallo limitato. Definizione di integrabilità secondo Riemann. Condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità.

Linearità e monotonia (confronto) dell'integrale di Riemann. Integrabilità della parte positiva/negativa e del modulo di una funzione integrabile. Integrabilità della restrizione di una funzione integrabile, integrale su intervalli orientati e additività rispetto al dominio. Integrabilità delle funzioni con un numero finito di punti di discontinuità e delle funzioni monotone. Teorema della media integrale. La funzione integrale. Teorema fondamentale del calcolo. Primitive, integrale indefinito. Integrazione per parti e per sostituzione. Integrazione di funzioni razionali fratte. Integrali impropri.

Prerequisiti

Algebra, geometria e trigonometria elementari.

Modalità didattica

Lezioni (8 cfu), Esercitazioni (4 cfu).

Corso erogato in lingua italiana.

Le lezioni in presenza saranno subordinate alle disposizioni delle autorità sanitarie e alla possibilità di svolgerle in condizioni ottimali di tutela di tutti i partecipanti.

Materiale didattico

Testo di riferimento: E. Giusti. Analisi Matematica I. Bollati Boringhieri.

Altri testi consigliati:

- G. De Marco: Analisi Uno, Zanichelli Decibel.
- C. D. Pagani, S. Salsa: Analisi matematica 1, Zanichelli.

Eserciziari consigliati:

- E. Giusti: Esercizi e complementi di analisi matematica, volume 1, Bollati Boringhieri.
- G. De Marco, C. Mariconda: Esercizi di calcolo in una variabile, Zanichelli Decibel.
- S. Salsa, A. Squellati: Esercizi di analisi matematica 1, Zanichelli.

- E. Acerbi, L. Modica, S. Spagnolo: Problemi scelti di analisi matematica. Vol. 1, Liguori.

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Primo anno, primo semestre.

Modalità di verifica del profitto e valutazione

Prova scritta e prova teorica/orale. Valutazione con voto in trentesimi 18-30/30.

Nella prova scritta si valuta la conoscenza dei contenuti del corso e la capacità di applicarli alla risoluzione di problemi. Nella prova teorica/orale si richiede la capacità di esporre gli enunciati e le dimostrazioni dei teoremi, le definizioni, gli esempi/controesempi e le tecniche di calcolo introdotte. In entrambe le prove verrà valutata la correttezza delle risposte, l'appropriatezza del linguaggio matematico utilizzato e il rigore e chiarezza dell'esposizione.
Per superare l'esame si deve ottenere un punteggio di almeno 15 sia nella prova pratica che in quella teorica, inoltre la media aritmetica dei due punteggi deve essere di almeno 18. Tale media aritmetica costituisce il voto finale dell'esame.

Nel corso dell'anno sono previsti 5 appelli d'esame nei seguenti periodi: due nel mese di febbraio, uno a giugno, uno a luglio e uno a settembre. Ogni appello d'esame prevede prima una prova scritta e poi, in caso di superamento della prova scritta, una prova teorica/orale a pochi giorni di distanza. Durante il periodo delle lezioni si terranno due prove scritte parziali che, in caso di esito complessivo positivo, permetteranno di sostenere direttamente la prova orale nel mese di febbraio.

Fino all'esaurimento della corrente emergenza sanitaria gli appelli d'esame di Analisi Matematica I si svolgeranno da remoto, articolandosi nelle due fasi seguenti.

1) Un esame scritto con solo domande chiuse, che sarà gestito con la Piattaforma Esami Informatizzati Moodle e si avvarrà di un sistema di controllo denominato "e-Proctoring". Per dettagli potete consultare il punto 2 delle linee guida disponibili al link

https://www.unimib.it/sites/default/files/linee_guida_per_gli_esami_scritti_-_versione_docenti.pdf

2) Una prova orale in videoconferenza sulla piattaforma Webex, che potrà essere sostenuta solo in caso di superamento della prova scritta e di esito positivo della verifica da parte del sistema di proctoring che non ci siano state irregolarità o comportamenti dubbi o scorretti durante la prova.

Orario di ricevimento

Su appuntamento.