UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

# SYLLABUS DEL CORSO

# Calcolo delle Probabilità

**2021-3-E3501Q014**

## Obiettivi

Fornire gli strumenti e i concetti di base del calcolo delle probabilità, arricchiti da una selezione di modelli e applicazioni.

Al termine del presente insegnamento, lo studente avrà acquisito le seguenti:

- *conoscenze*: linguaggio, definizioni ed enunciati dei risultati fondamentali della teoria della probabilità;
- *competenze*: comprensione operativa delle principali tecniche dimostrative;

- *abilità*: capacità di applicare le nozioni teoriche per la risoluzione di esercizi e l'analisi di problemi.

## Contenuti sintetici

Nella prima parte viene presentata la modellistica matematica dei fenomeni casuali per mezzo degli **spazi di probabilità**, secondo gli assiomi di N. Kolmogorov basati sulla teoria della misura. Vengono quindi studiate in dettaglio le **variabili aleatorie**, che costituiscono il "linguaggio operativo" del calcolo delle probabilità.

La seconda parte si apre con lo studio delle diverse **nozioni di convergenza** per successioni di variabili aleatorie. Vengono quindi presentati i **teoremi limite** che costituiscono i risultati fondamentali del calcolo delle probabilità: la *legge dei grandi numeri* e il *teorema limite centrale*. L'insegnamento si conclude con un'introduzione alle **catene di Markov**, una delle classi più semplici e allo stesso tempo importanti di processi stocastici.

Lungo tutto lo svolgimento dell'insegnamento, la presentazione della teoria è accompagnata dalla discussione di numerosi **modelli e applicazioni**.

## Programma esteso

1. *Spazi di probabilità*

- Introduzione alla probabilità
- Assiomi della probabilità
- Proprietà di base della probabilità
- Calcolo combinatorio e spazi uniformi
- Probabilità condizionale

- Indipendenza di eventi

2. *Variabili aleatorie*

- Richiami di teoria della misura
- Distribuzioni notevoli discrete e continue
- Variabili aleatorie
- Leggi marginali e legge congiunta
- Indipendenza di variabili aleatorie
- Trasformazioni di variabili aleatorie
- Valore medio, momenti, varianza e covarianza

- Spazi $L^p$ e disuguaglianze
- Correlazione e regressione lineare (cenni)

3. *Convergenza e teoremi limite*

- Richiami sui teoremi di convergenza
- Lemma di Borel-Cantelli
- Legge debole e forte dei grandi numeri

- Nozioni di convergenza per variabili aleatorie
- Convergenza debole di probabilità
- Legge dei piccoli numeri
- Teorema limite centrale e approssimazione normale
- Legge 0-1 di Kolmogorov

4. *Catene di Markov*

- Introduzione ai processi stocastici
- Catene di Markov e proprietà di base

- Stati ricorrenti e transitori
- Misure invarianti e reversibili
- Teoremi di convergenza (cenni)
- Probabilità di assorbimento (cenni)

- Passeggiate aleatorie su grafi (cenni)

5. *Modelli e applicazioni (presentati in parallelo alla teoria)*

- Paradossi classici (compleanni, Monty-Hall, Borel, Bertrand)
- Permutazioni aleatorie e punti fissi
- Concentrazione del volume in alte dimensioni
- Il teorema di approssimazione di Weierstrass
- Simulazione di variabili aleatorie
- Passeggiata aleatoria semplice
- Rovina del giocatore
- L'algoritmo PageRank

## Prerequisiti

Le conoscenze, competenze e abilità impartite negli insegnamenti dei primi due anni, in particolare *Algebra Lineare*, *Analisi 1 e 2*, *Teoria della Misura*.

## Modalità didattica

Lezioni ed esercitazioni frontali, articolate in:

- lezioni teoriche (10 cfu) in cui si fornisce la conoscenza di definizioni, risultati ed esempi rilevanti, in parallelo alle competenze relative alla loro comprensione;
- esercitazioni (2 cfu) in cui si forniscono abilità necessaire per applicare le conoscenze e competenze teoriche alla risoluzione di esercizi.

Insegnamento erogato in lingua italiana.

Fino all'esaurimento dell'emergenza Covid-19, le lezioni saranno tenute a distanza. Tutte le lezioni saranno videoregistrate e rese disponibili da remoto. Al fine di facilitare il coinvolgimento degli studenti, saranno organizzati eventi di discussione / ricevimento in videoconferenza sincrona o, se sarà possibile, in presenza (con gli studenti suddivisi in gruppi, se opportuno).

## Materiale didattico

*Libri di riferimento*

- F. Caravenna, P. Dai Pra. *Probabilità. Un'introduzione attraverso modelli e applicazioni.* Springer-Verlag Italia, Milano (2013).
- D. F. Anderson, T. Seppäläinen, B. Valkó. *Introduction to Probability*. Cambridge University Press (2018).
- D. Williams. *Probability with Martingales.* Cambridge University Press (1991).

*Altro materiale didattico (disponibile sulla pagina e-learning)*

- Dispense del docente su argomenti specifici
- Fogli di esercizi settimanali (con soluzioni dettagliate)

- Testi delle prove scritte degli anni passati (con soluzioni dettagliate)

- Elenco delle dimostrazioni per la prova orale
- Videoregistrazione delle lezioni
- Appunti delle lezioni

## Periodo di erogazione dell'insegnamento

Terzo anno, primo semestre

## Modalità di verifica del profitto e valutazione

Prova scritta - o prove parziali - e prova orale, con le modalità descritte qui sotto. Gli aspetti valutati in ciascuna prova sono l'esattezza delle risposte, la creatività, la precisione, la chiarezza espositiva.

Ci saranno 5 appelli d'esame (due a febbraio, uno a giugno, uno a luglio, uno a settembre).

*Nel periodo di emergenza legato all'epidemia di COVID-19 le prove orali si svolgeranno per via telematica, secondo modalità che saranno specificate sulla pagina e-learning dell'insegnamento.*

- La *prova scritta* ha una durata di tre ore e riceve una valutazione in trentesimi. Nella prova vengono valutate abilità pratiche (soluzione di esercizi) oltre che conoscenze e competenze teoriche (definizioni, esempi e controesempi). La prova scritta risulta superata col punteggio minimo di 15/30 e permette di accedere alla prova orale.
- A metà e alla fine dell'insegnamento sono previste due *prove parziali scritte*, della durata di un'ora e mezza ciascuna, valutate in quindicesimi. Il superamento di entrambe le prove parziali col punteggio minimo di 7,5/15 equivale al superamento della prova scritta (con la "somma" dei punteggi ottenuti) e permette di accedere alla prova orale.

- La *prova orale* ha una durata di 30-45 minuti e riceve una valutazione in trentesimi. Può essere sostenuta (dopo avere superato la prova scritta) in un appello qualsiasi dello stesso anno accademico. Nella prova viene valutata la conoscenza di una selezione di dimostrazioni e la conoscenza operativa delle nozioni presentate. La prova orale risulta superata col punteggio minimo di 15/30.
- La valutazione finale risulta dalla media delle valutazioni della prova scritta e della prova orale. L'esame risulta superato col punteggio minimo di 18/30.

*Esonero dalla prova orale.* Chi supera la prova scritta con un punteggio compreso tra 20/30 e 27/30 può rinunciare a sostenere la prova orale, registrando il voto ottenuto nella prova scritta; con un punteggio superiore a 27/30 è ancora possibile rinunciare a sostenere la prova orale, ma in questo caso il voto registrato sarà di 27/30; infine, con un punteggio inferiore a 20/30, è necessario sostenere la prova orale.

## Orario di ricevimento

Fissato all'inizio dell'insegnamento e riportato sulla pagina e-learning.