

## SYLLABUS DEL CORSO

### Calcolo delle Probabilità

2021-3-E3501Q014

---

#### Obiettivi

Fornire gli strumenti e i concetti di base del calcolo delle probabilità, arricchiti da una selezione di modelli e applicazioni.

Al termine del presente insegnamento, lo studente avrà acquisito le seguenti:

- *conoscenze*: linguaggio, definizioni ed enunciati dei risultati fondamentali della teoria della probabilità;
- *competenze*: comprensione operativa delle principali tecniche dimostrative;
- *abilità*: capacità di applicare le nozioni teoriche per la risoluzione di esercizi e l'analisi di problemi.

#### Contenuti sintetici

Nella prima parte viene presentata la modellistica matematica dei fenomeni casuali per mezzo degli **spazi di probabilità**, secondo gli assiomi di N. Kolmogorov basati sulla teoria della misura. Vengono quindi studiate in dettaglio le **variabili aleatorie**, che costituiscono il "linguaggio operativo" del calcolo delle probabilità.

La seconda parte si apre con lo studio delle diverse **nozioni di convergenza** per successioni di variabili aleatorie. Vengono quindi presentati i **teoremi limite** che costituiscono i risultati fondamentali del calcolo delle probabilità: la *legge dei grandi numeri* e il *teorema limite centrale*. L'insegnamento si conclude con un'introduzione alle **catene di Markov**, una delle classi più semplici e allo stesso tempo importanti di processi stocastici.

Lungo tutto lo svolgimento dell'insegnamento, la presentazione della teoria è accompagnata dalla discussione di numerosi **modelli e applicazioni**.

#### Programma esteso

### 1. Spazi di probabilità

- Introduzione alla probabilità
- Assiomi della probabilità
- Proprietà di base della probabilità
- Calcolo combinatorio e spazi uniformi
- Probabilità condizionale
  
- Indipendenza di eventi

### 2. Variabili aleatorie

- Richiami di teoria della misura
- Distribuzioni notevoli discrete e continue
- Variabili aleatorie
- Leggi marginali e legge congiunta
- Indipendenza di variabili aleatorie
- Trasformazioni di variabili aleatorie
- Valore medio, momenti, varianza e covarianza
  
- Spazi  $L^p$  e disuguaglianze
- Correlazione e regressione lineare (cenni)

### 3. Convergenza e teoremi limite

- Richiami sui teoremi di convergenza
- Lemma di Borel-Cantelli
- Legge debole e forte dei grandi numeri
  
- Nozioni di convergenza per variabili aleatorie
- Convergenza debole di probabilità
- Legge dei piccoli numeri
- Teorema limite centrale e approssimazione normale
- Legge 0-1 di Kolmogorov

### 4. Catene di Markov

- Introduzione ai processi stocastici
- Catene di Markov e proprietà di base
  
- Stati ricorrenti e transitori
- Misure invarianti e reversibili
- Teoremi di convergenza (cenni)
- Probabilità di assorbimento (cenni)
  
- Passeggiate aleatorie su grafi (cenni)

## 5. Modelli e applicazioni (presentati in parallelo alla teoria)

- Paradossi classici (compleanni, Monty-Hall, Borel, Bertrand)
- Permutazioni aleatorie e punti fissi
- Concentrazione del volume in alte dimensioni
- Il teorema di approssimazione di Weierstrass
- Simulazione di variabili aleatorie
- Passeggiata aleatoria semplice
- Rovina del giocatore
- L'algoritmo PageRank

## Prerequisiti

Le conoscenze, competenze e abilità impartite negli insegnamenti dei primi due anni, in particolare *Algebra Lineare*, *Analisi 1 e 2*, *Teoria della Misura*.

## Modalità didattica

Lezioni ed esercitazioni frontali, articolate in:

- lezioni teoriche (10 cfu) in cui si fornisce la conoscenza di definizioni, risultati ed esempi rilevanti, in parallelo alle competenze relative alla loro comprensione;
- esercitazioni (2 cfu) in cui si forniscono abilità necessarie per applicare le conoscenze e competenze teoriche alla risoluzione di esercizi.

Insegnamento erogato in lingua italiana.

Fino all'esaurimento dell'emergenza Covid-19, le lezioni saranno tenute a distanza. Tutte le lezioni saranno videoregistrate e rese disponibili da remoto. Al fine di facilitare il coinvolgimento degli studenti, saranno organizzati eventi di discussione / ricevimento in videoconferenza sincrona o, se sarà possibile, in presenza (con gli studenti suddivisi in gruppi, se opportuno).

## Materiale didattico

### *Libri di riferimento*

- F. Caravenna, P. Dai Pra. *Probabilità. Un'introduzione attraverso modelli e applicazioni*. Springer-Verlag Italia, Milano (2013).
- D. F. Anderson, T. Seppäläinen, B. Valkó. *Introduction to Probability*. Cambridge University Press (2018).
- D. Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge University Press (1991).

*Altro materiale didattico (disponibile sulla pagina e-learning)*

- Dispense del docente su argomenti specifici
- Fogli di esercizi settimanali (con soluzioni dettagliate)
- Testi delle prove scritte degli anni passati (con soluzioni dettagliate)
- Elenco delle dimostrazioni per la prova orale
- Videoregistrazione delle lezioni
- Appunti delle lezioni

## Periodo di erogazione dell'insegnamento

Terzo anno, primo semestre

## Modalità di verifica del profitto e valutazione

Prova scritta - o prove parziali - e prova orale, con le modalità descritte qui sotto. Gli aspetti valutati in ciascuna prova sono l'esattezza delle risposte, la creatività, la precisione, la chiarezza espositiva.

Ci saranno 5 appelli d'esame (due a febbraio, uno a giugno, uno a luglio, uno a settembre).

*Nel periodo di emergenza legato all'epidemia di COVID-19 le prove orali si svolgeranno per via telematica, secondo modalità che saranno specificate sulla pagina e-learning dell'insegnamento.*

- La *prova scritta* ha una durata di tre ore e riceve una valutazione in trentesimi. Nella prova vengono valutate abilità pratiche (soluzione di esercizi) oltre che conoscenze e competenze teoriche (definizioni, esempi e controesempi). La prova scritta risulta superata col punteggio minimo di 15/30 e permette di accedere alla prova orale.
- A metà e alla fine dell'insegnamento sono previste due *prove parziali scritte*, della durata di un'ora e mezza ciascuna, valutate in quindicesimi. Il superamento di entrambe le prove parziali col punteggio minimo di 7,5/15 equivale al superamento della prova scritta (con la "somma" dei punteggi ottenuti) e permette di accedere alla prova orale.
- La *prova orale* ha una durata di 30-45 minuti e riceve una valutazione in trentesimi. \_\_\_\_\_ Nella prova viene valutata la conoscenza di una selezione di dimostrazioni e la conoscenza operativa delle nozioni presentate. La prova orale risulta superata col punteggio minimo di 15/30.
- La valutazione finale risulta dalla media delle valutazioni della prova scritta e della prova orale. L'esame risulta superato col punteggio minimo di 18/30.

*Esonero dalla prova orale.* Chi supera la prova scritta con un punteggio compreso tra 20/30 e 27/30 può rinunciare a sostenere la prova orale, registrando il voto ottenuto nella prova scritta; con un punteggio superiore a 27/30 è ancora possibile rinunciare a sostenere la prova orale, ma in questo caso il voto registrato sarà di 27/30; infine, con un punteggio inferiore a 20/30, è necessario sostenere la prova orale.

## Orario di ricevimento

Fissato all'inizio dell'insegnamento e riportato sulla pagina e-learning.

