UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

SYLLABUS DEL CORSO

Geometria III

2021-3-E3501Q055

Obiettivi

L'insegnamento ha lo scopo di introdurre la teoria del gruppo fondamentale e dei rivestimenti topologici e la teoria delle varietà differenziali.

I risultati di apprendimento attesi includono:

- la conoscenza delle definizioni e dei risultati basilari nell'ambito della teoria del gruppo fondamentale e delle varietà differenziali, la conoscenza di importanti esempi illustrativi della teoria discussa;
- la comprensione delle principali tecniche dimostrative;
- la capacità di applicare le conoscenze acquisite nella risoluzione di problemi e nello studio della geometria di esempi concreti.

Contenuti sintetici

Gruppo fondamentale e rivestimenti di uno spazio topologico e loro proprietà. Varietà differenziali astratte: carte, atlanti, spazio tangente, fibrato tangente, calcolo differenziale sulle varietà. Immersioni, sommersioni, sottovarietà. Campi di vettori, flussi, parentesi di Lie. Forme differenziali, teorema di Stokes. Coomologia di de Rham.

Programma esteso

- Gruppo fondamentale di uno spazio topologico puntato. Definizione ed esempi elementari. Omomorfismo indotto da funzioni continue. Dipendenza dal punto base. Spazi connessi per archi. Gruppo fondamentale della sfera. Omotopia di applicazioni e morfismi indotti sul gruppo fondamentale. Invarianza omotopica del gruppo fondamentale. Presentazione di gruppi e prodotto libero. Teorema di Seifert - Van Kampen. Applicazioni. Definizione di rivestimento. Proprieta? e legami con il gruppo fondamentale.

- Varieta? topologiche e varieta? differenziali. Definizione ed esempi. Applicazioni differenziabili tra varieta?.

Diffeomorfismi. Spazio tangente. Differenziale di una applicazione differenziabile. Vettori tangenti ad una curva. Immersioni, embedding, sommersioni. Sottovarietà regolari. Fibrato tangente e campi vettoriali. Curve integrali e flussi di campi vettoriali. Enunciato del Teorema di Poincare?-Hopf. Commutatore di campi vettoriali. Struttura di algebra di Lie sullo spazio dei campi vettoriali. Derivata di Lie di un campo vettoriale. Teorema di commutativita? dei flussi. Spazio cotangente e fibrato cotangente. Campi di covettori. Accoppiamento di vettori e covettori. Forme multilineari e prodotto esterno. Forme differenziali. Algebra esterna di una varieta? differenziale. Derivata esterna di forme differenziali e sue proprieta?. Forme differenziali chiuse ed esatte. Coomologia di de Rham. Lemma di Poincare?. Teorema di de Rham. Paracompattezza. Partizioni dell'unita?. Integrazione di forme differenziali su varieta?. Varieta? con bordo e teorema di Stokes. Esempi e applicazioni.

Prerequisiti

Il contenuto degli insegnamenti di Geometria I e II, di Analisi Matematica I e (in parte) II, di Algebra Lineare e Geometria.

Modalità didattica

Lezione frontale alla lavagna.

Fino all'esaurimento dell'emergenza sanitaria in corso, le lezioni si svolgeranno esclusivamente in modalità telematica. Tutte le lezioni saranno registrate e rese disponibili sulla pagina dell'insegnamento. Sarà inoltre possibile organizzare eventi o ricevimento studenti in videoconferenza sincrona.

Materiale didattico

Testi di riferimento

- per la prima parte: W. Fulton - Algebraic Topology. A first course - Springer, 1995*
- per la seconda parte: L. W. Tu - An Introduction to Manifolds (Second Edition) - Springer, 2011*

Altri testi consigliati

- L. I. Nicolaescu - Lectures on the Goemetry of Manifolds (Second Edition) - World Scientific, 2007*
- J. M. Lee - Introduction to Smooth Manifolds - Springer, 2012*
- V. Guillemin and P. Haine - Differential forms - World Scientific, 2019

**Questo testo è disponibile in formato elettronico attraverso la pagina della biblioteca di Ateneo.*

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Primo semestre.

Modalità di verifica del profitto e valutazione

- La verifica del profitto si basa su due prove, valutate sulla base della correttezza, della completezza, del rigore e della chiarezza delle risposte fornite.

  Prova scritta - Si devono risolvere alcuni esercizi in 120 minuti. La prova è valutata in trentesimi. Questa prova si intende superata ottenendo un punteggio non inferiore a 15.

Prova orale - Si deve rispondere a domande su argomenti trattati durante il corso o sugli esercizi della prova scritta, insistendo sui punti poco chiari. Per sostenere la prova orale è necessario avere superato la prova scritta.

- Sono previsti esoneri dalle prove.

  Esonero dalla prova scritta - Durante il corso saranno assegnati, con cadenza regolare, tre *homework*. Se consegnate nei termini stabiliti, le soluzioni di questi *homework* saranno valutate secondo la scala decrescente A, B, C, D, dove C è la soglia di sufficienza. Chi avrà ottenuto una valutazione sufficiente per ciascun *homework* sarà esonerato dalla prova scritta e potrà sostenere direttamente la prova orale in uno degli appelli dell'anno accademico corrente.

  Gli studenti sono incoraggiati ad interagire e a confrontarsi sulle soluzioni degli *homework*. Tuttavia, le soluzioni consegnate dovranno essere individuali. La prova orale potrà avere inizio con la discussione delle soluzioni degli *homework*, insistendo sui punti poco chiari.

  Esonero dalla prova orale - Chi sostiene la prova scritta ottenendo un punteggio S non inferiore a 21 può evitare la prova orale e verbalizzare direttamente il voto minimo tra S e 27. Si noti che la prova orale è obbligatoria per chi fruisce dell'esonero dalla prova scritta.

- Il superamento della prova scritta consente di sostenere la prova orale in uno qualsiasi degli appelli dell'anno accademico corrente. Il fallimento della prova orale comporta la ripetizione della prova scritta.

Nel periodo di emergenza legato all'epidemia di COVID-19 le prove d'esame si svolgeranno per via telematica, secondo modalità che saranno specificate sulla pagina e-learning dell'insegnamento.

Orario di ricevimento

Su appuntamento.