UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

COURSE SYLLABUS

Mathematics III

2021-2-E2701Q063

Obiettivi

Gli obiettivi formativi del corso sono i seguenti.

Conoscenza e capacità di comprensione. Lo studente apprenderà i principali risultati del calcolo integrale in più variabili, del calcolo vettoriale e dell'algebra lineare e si impadronirà dei relativi strumenti e tecniche di calcolo.

Capacità di applicare conoscenza e comprensione. Mediante l'illustrazione di vari esempi e con lo svolgimento di esercizi, lo studente svilupperà la capacità di applicare i risultati teorici esposti nelle lezioni a problemi di integrazione multipla, calcolo vettoriale e algebra lineare.

Autonomia di giudizio. Lo studente saprà affrontare in modo critico problemi di integrazione multipla, calcolo vettoriale e algebra lineare, individuando autonomamente i metodi più appropriati tra quelli appresi.

Abilità comunicative. L'acquisizione del linguaggio e del formalismo matematico introdotto renderà lo studente in grado di comunicare con rigore e chiarezza le conoscenze acquisite.

Capacità di apprendimento. Lo studente sarà in grado di applicare le conoscenze acquisite a contesti differenti da quelli presentati durante le lezioni, in particolare nello studio di altre discipline scientifiche (quali la chimica e la fisica) che richiedano un buona preparazione matematica di base.

Contenuti sintetici

Integrazione in più variabili, calcolo vettoriale e algebra lineare.

Programma esteso

Prima Parte. Calcolo:

1- **Integrali doppi.** Funzioni integrabili secondo Riemann in rettangoli del piano, formule di riduzione per integrali doppi su rettangoli, funzioni integrabili secondo Riemann in domini generici, formule di riduzione per integrali doppi su regioni semplici, additività rispetto al dominio, formula di cambiamento di variabile negli integrali doppi, integrali doppi in coordinate polari.

2-Integrali tripli. Funzioni integrabili secondo Riemann in parallelepipedi dello spazio, formule di riduzione per integrali tripli su parallelepipedi, formule di riduzione per integrali su regioni semplici (integrazione per fili e per strati), formula di cambiamento di variabile negli integrali tripli, integrali tripli in coordinate cilindriche, integrali tripli in coordinate sferiche.

3-Integrali di superficie. Superfici in $\mathbf{R}^3$, parametrizzazione di una superficie, superfici regolari, versore normale ad una superficie, superfici regolari a pezzi, orientabilità di una superficie, integrale di superficie, flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie.

4-Calcolo vettoriale. Teorema di Green, Teorema del rotore o di Stokes, Teorema della divergenza o di Gauss.

Seconda Parte: Algebra lineare.

5- Algebra lineare. *Spazi vettoriali* (reali e complessi) sottospazi vettoriale. combinazione lineare, Span, sistema di generatori, vettori linearmente indipendenti e dipendenti, base, dimensione di uno spazio vettoriale. Teorema del completamento della base. Esempio di spazio vettoriale di dimensione infinita. Esempi di basi e componenti in spazi vettoriali.
Applicazioni lineari: definizione e primi esempi. Teorema di struttura. Matrice associata ad un'applicazione lineare dopo aver scelto basi in partenza ed arrivo. Esempi di costruzione ed utilizzo della matrice associata ad un'applicazione lineare. Matrice di cambio di base: costruzione ed utilizzo. Ker e immagine di un'applicazione lineare. *Teorema rank-nullity* (relazione tra le dimensioni di ker, immagine e spazio di partenza). Conseguenze in termini di iniettività e surgettività.
Interpretazione dei sistemi lineari in termini di combinazioni lineari di colonne: legami con span, lineare indipendenza, generatori. Interpretazione dei sistemi lineari in termini di ker e immagine di un'opportuna applicazione lineare.

Cambiamento di base, applicazioni lineari invertibili, determinante, formula di Laplace, formula di Binet. Matrice inversa: quando esiste e come si calcola con l'algoritmo di Gauss. Inversa del prodotto e della trasposta. Uso delle matrici inverse nei cambi di base. Rango di una matrice.

Prodotti scalari, prodotti hermitiani, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, norma, ortogonalità, Basi ortogonali e ortonormali. Procedimento di *ortogonalizzazione* di Gram-Schmidt. Ortogonale di un sottospazio e sue proprietà. Proiezione ortogonale su un sottospazio. Esempi di calcolo di basi ortogonali e di ortogonali di sottospazi.Matrici ortogonali: caratterizzazione e proprietà.

Definizione di matrici simili e problema della diagonalizzazione. Autovalori ed autovettori. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Condizioni necessarie/sufficienti per la diagonalizzabilità. Spazio delle metrici simmetriche. *Teorema spettrale* per applicazioni e matrici simmetriche.

Lemmi classici sulle applicazioni simmetriche: autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali, l'ortogonale di un sottospazio invariante è a sua volta invariante, gli autovalori sono reali. Dimostrazione del teorema spettrale. Esempi di diagonalizzazione.
Teorema spettrale in dimensione infinita per endomorfismi hermitiani (o auto-aggiunti).

Diagonalizzazione simultanea di endomorfismi hermitiani commutanti

Prerequisiti

I contenuti dei corsi di matematica del primo anno (Matematica I e II)

Modalità didattica

Nel periodo di emergenza Covid-19 le lezioni si svolgeranno in parte in remoto asincrono e in parte in remoto sincrono. Le registrazioni delle lezioni saranno caricate sulle piattaforma e-learning **in accordo al programma del corso** (permettendo quindi agli studenti di "seguire" le lezioni al orario programmato). In questo caso, anche parte delle esercitazioni saranno erogate da remoto, come risoluzione guidata di problemi ed esercizi.

Si organizzarano **eventi specifici e ricevimento studenti** in **videoconferenza sincrona.**

Parte delle esercitazioni saranno erogate in **videoconferenza sincrona** per permettere agli studenti di partecipare piu attivamente.

Per tutti gli eventi sincroni gli studenti saranno avvertiti in congruo anticipo sulla piattaforma di elearning.

Lezioni frontali (6 cfu), esercitazioni (2 cfu).

Materiale didattico

Verrano distribuite alcune note e altro materiale per diversi argomenti. Saranno disponibili sul sito e-learning del corso.

Inoltre si consigliano i seguenti libri:

Bibliografia:

Per la prima parte:

- Stewart, Calcolo. Funzioni di più variabili, Apogeo.

-Analisi Matematica Vol. 2, Con elementi di geometria e calcolo vettoriale

Susanna Terracini, Gianmaria Verzini, Vivina Barutello, Monica Conti, Davide L. Ferrario, Apogeo (disponibile come ebook)

Per la seconda parte:

-Linear algebra and its applications, Strang, Gilbert. (sara disponibile come e-book nella biblioteca. E gia disponibile cartaceo)

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Secondo anno, primo semestre.

Modalità di verifica del profitto e valutazione

Valutazione con voto in trentesimi 18-30/30 con eventuale lode.

Nel periodo di emergenza Covid-19 gli esami orali saranno solo telematici. Verranno svolti utilizzando la piattaforma WebEx e nella pagina e-learning dell'insegnamento verrà riportato un link pubblico per l'accesso all'esame di possibili spettatori virtuali.

Nella prova scritta si valuta la conoscenza dei contenuti del corso e la capacità di applicarli alla risoluzione di problemi. Si richiede inoltre la capacità di esporre le definizioni, gli enunciati dei teoremi, gli esempi/controesempi e le tecniche di calcolo introdotte nel corso. La valutazione tiene conto dell'esattezza delle risposte, della completezza nonché' della chiarezza espositiva.

Esame scritto con ***eventuale*** **colloquio orale.**

La prova scritta si intende superata SOLO se la votazione e maggiore o uguale di 18/30.

La prova scritta e composta da esercizi (Simili agli esercizi fatti a lezione e/o proposti negli esercizi agli studenti) fino a 22 punti e fino a un massimo di 8 punti di teoria (definizioni di concetti di base e risoltati visti a lezione).

Prova orale (facoltativa)

La prova orale è **facoltativa** e si terrà di norma qualche giorno dopo la prova scritta. Si tratta di una discussione

sulla prova scritta e sui risultati e sui metodi illustrati nel corso. È possibile sostenere il colloquio orale **soltanto** se il voto della prova scritta è maggiore o uguale a **18/30.**

Nel caso si decida di **non sostenere** la prova orale, il voto finale (verbalizzato solo se sufficiente) sarà uguale al **voto** della prova scritta.

In caso di esito positivo della prova scritta, Lo studente che si ritenga preparato, ha facolt a di sostenere la prova orale. Il colloquio orale individuale e volto a verificare il livello delle conoscenze acquisite; l'autonomia di analisi e giudizio; le capacità espositive dello studente. La valutazione tiene conto dell'esattezza delle risposte, della completezza nonché' della chiarezza espositiva.

Resta inteso che *qualunque esito e possibile* nel momento in cui lo studente decida di presentarsi anche alla prova orale. In particolare, un orale molto scarso puo abbassare il voto della prova scritta e potrebbe risultare in un voto finale non sufficiente (minore di 18/30).

Gli studenti che non abbiano superato la prova scritta **saranno convocati alla prova orale e potranno sostenere essa SOLTANTO SE:**

-hanno avuto nella prova scritta un voto uguale o maggiore a **17/30, oppure**

- hanno avuto nella prova scritta un voto **uguale o maggiore a 16/30 di cui al meno 6/8 nelle domande teoriche.**

Prove in itinere

Durante il semestre ci saranno **due** prove in itinere. Il **voto complessivo** delle prove in itinere è la media aritmetica dei loro voti.

Il risultato delle due prove intermedie vale come **sostituzione** di una (e una sola) prova scritta dell'anno accademico corrispondente.

Lo svolgimento di una prova scritta annulla automaticamente la validità del risultato delle prove intermedie.

Nel corso dell'anno sono previsti 6 appelli d'esame nei seguenti periodi: uno nel mese di gennaio, uno nel mese di febbraio, uno nel mese di aprile/maggio, uno nei mesi di giugno-luglio, uno a settembre e uno a novembre.

Orario di ricevimento

Su appuntamento concordato per e-mail

Si organizzarano inoltre ricevimento studenti in videoconferenza sincrona.