UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

SYLLABUS DEL CORSO

Analisi Superiore

2021-1-F4001Q055

Obiettivi

Fornire un'introduzione a metodi analitici di base, utilizzando il problema di Dirichlet del Laplaciano quale filo conduttore.

I risultati di apprendimento attesi comprendono:

- Conoscenze: la conoscenza e la comprensione delle definizioni e degli enunciati fondamentali, nonché delle strategie di dimostrazione basilari utilizzate nell'analisi moderna; la conoscenza e la comprensione di alcuni esempi chiave in cui si esplica la teoria.
- Capacità: la capacità di riconoscere il ruolo dei concetti e degli strumenti avanzati dell'analisi moderna introdotti (tra cui convoluzione, distribuzioni, spazi di Sobolev) in diversi ambiti della matematica pura e applicata (analisi numerica, fisica matematica, probabilità); la capacità di applicare tale bagaglio concettuale alla costruzione di esempi concreti e alla risoluzione di esercizi; la capacità di esporre, comunicare e argomentare in modo chiaro e preciso sia i contenuti teorici del corso, sia le loro applicazioni a situazioni specifiche, anche inerenti ad altri ambiti.

Contenuti sintetici

Nozioni basilari sulla convoluzione, il problema di Dirichlet nella palla unitaria e nel semispazio, distribuzioni, regolarità di distribuzioni, spazi di Sobolev, problemi ellittici del secondo ordine.

Programma esteso

Capitolo 0. **Nozioni preliminari**
Convoluzione. Ipersuperficie di classe C^K in R^n. Teorema della divergenza e formule di Green. Misure complesse.

Capitolo 1. **Il problema di Dirichlet classico**

Funzioni armoniche. Teoremi del valor medio per funzioni armoniche. Caratterizzazione di funzioni armoniche mediante la media. Principio del massimo per funzioni armoniche e unicità del problema di Dirichlet. Potenziale newtoniano. Formula di rappresentazione di Green e sue conseguenze. Funzione di Green e sue proprietà. Nucleo di Poisson. Funzione di Green e nucleo di Poisson per il semispazio. Ulteriori proprietà delle funzioni armoniche: stima delle derivate, principio di riflessione di Schwarz e Teorema di Liouville. Risoluzione del problema di Dirichlet classico sul semispazio. La funzione di Green per la sfera. Il relativo nucleo di Poisson. Soluzione del problema di Dirichlet per la sfera per n ? 3. Soluzione del problema di Dirichlet per il disco in dimensione due, via serie di Fourier.

Capitolo 2. **Dati L^P sul semispazio e convergenza al bordo**
Integrale di Poisson di misure e di funzioni L^p. Convergenza debole?. L'integrale di Poisson risolve il problema di Dirichlet sul semispazio con condizioni al bordo in senso L^p o debole*. Operatori di tipo debole (1,1). Il teorema di interpolazione di Marcinkiewicz. La funzione massimale di Hardy–Littlewood. Un lemma di ricoprimento. Proprietà di limitatezza della funzione massimale di Hardy–Littlewood. Il teorema di differenziazione di Lebesgue. Convergenza non tangenziale degli integrali di Poisson. Stime del nucleo di Poisson, funzioni massimali radiale e non tangenziale di Poisson e relativo risultato di convergenza puntuale.

Capitolo 3. **Funzioni generalizzate e loro derivate**
Funzioni e misure come funzionali lineari. Distribuzioni. Ogni funzione localmente integrabile è una distribuzione. Derivate di distribuzioni. La derivata di una distribuzione è una distribuzione. Esempi.

Capitolo 4. **Spazi di Sobolev**
Motivazioni, definizioni e proprietà. Proprietà degli spazi di Sobolev: $W^{k,p}$(?) è uno spazio di Banach, approssimazione con funzioni regolari, prodotto e composizione di funzioni in spazi di Sobolev. Spazi di Sobolev in dimensione 1: esistenza di un rappresentante continuo e teorema fondamentale del calcolo per funzioni $W^{1,p}$(a, b). Teorema di Morrey. Disuguaglianza di Sobolev (Teorema di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg). Immersioni di Sobolev. Operatore di prolungamento e teorema del prolungamento per il semispazio e per domini limitati regolari. Approssimazione globale con funzioni lisce. Immersioni di Sobolev per domini di estensione. Immersioni per spazi di Sobolev di ordine superiore. Teorema di Rellich-Kondrachov. Esistenza dell'operatore di traccia $?_0{}^p$:$W^{1,p}$(?) ? L^p(??) per 1 ? p < +? e ? semispazio o dominio limitato regolare. Cenni agli spazi di Sobolev di ordine frazionario, teorema di Gagliardo. Caratterizzazione di $W^{1,p}{}_0$(?) tramite le tracce.

Capitolo 5. **Problemi ellittici del secondo ordine**
Lemma di Lax-Milgram. Problemi ellittici del secondo ordine: formulazione variazionale, esistenza di soluzioni. Disuguaglianza di Poincaré. Principio di Dirichlet. Problemi ellittici con condizioni al bordo di Neumann: formulazione variazionale e cenni agli spazi H(div,?). Disuguaglianza di Poincaré?-Wirtinger. Esistenza di soluzioni per il problema di Neumann sotto condizioni di compatibilità sui dati.

Prerequisiti

Calcolo in più variabili, algebra lineare, fondamenti di spazi di Hilbert e di spazi L^p.

Modalità didattica

In condizioni normali le lezioni saranno frontali, con uso di lavagna. Parte delle ore sarà dedicata all'illustrazione dei principali risultati della teoria; la rimanente parte sarà dedicata allo svolgimento di esercizi, in precedenza assegnati, di applicazione della teoria svolta.

Fino all'esaurimento della presente emergenza sanitaria le lezioni si svolgeranno da remoto in modalità asincrona. Se richiesti dagli studenti o ritenuti utili dal docente, potranno aver luogo eventi in videoconferenza sincrona, eventualmente ristretti a sottoinsiemi dei frequentanti.

Materiale didattico

- Dispense disponibili sulla pagina e-learning del corso.
- A. Bressan. *Lecture Notes on Functional Analysis*. American Mathematical Society, 2013.
- H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- L.C. Evans. *Partial differential equations*, American Mathematical Society.

Periodo di erogazione dell'insegnamento

I semestre.

Modalità di verifica del profitto e valutazione

Orario di ricevimento

Su appuntamento.