



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

SYLLABUS DEL CORSO

Calcolo Stocastico e Finanza

2021-1-F4001Q107

Aims

The course aims at providing the student with the definitions and basic properties of the Brownian motion and the fundamental results of the theory of stochastic differential equations. Particular emphasis will be given on the interactions between stochastic differential equations and partial differential equations, and on the applications to the modeling of financial derivatives.

At the end of the course students will have acquired the following:

- *knowledge*: language, definitions and statements of the fundamental results about Brownian motion and stochastic differential equations;
- *competence*: operational understanding of the main proof techniques and of the main financial models to which the theory can be applied;
- *skills*: ability to apply theoretical notions to the analysis of problems and models.

Contents

Introduction to stochastic processes in continuous time
Levy processes and Brownian motion
Ito stochastic integral
Ito's formula
Stochastic differential equations (SDEs)

The associated Kolmogorov differential operator
The Kolmogorov PDE and the Feynman-Kac formula
Introduction to continuous time financial markets
The Black and Scholes formula and the pricing of European options

Detailed program

Il moto browniano. Definizione di processo stocastico. Spazio delle traiettorie, insiemi cilindrici, sigma-algebra prodotto. Legge di un processo stocastico e leggi finito-dimensionali. Vettori aleatori normali. Processi stocastici gaussiani. Definizione di moto browniano. Costruzione del moto Browniano a partire dal Teorema di esistenza di Daniell-Kolmogorov e utilizzando il Teorema di continuità di Kolmogorov. Caratterizzazione del MB come processo gaussiano. Proprietà di invarianza (riflessione spaziale, traslazione e riflessione temporale, riscaldamento diffusivo, inversione temporale). Moti Browniani rispetto alla filtrazione naturale e rispetto a una filtrazione qualsiasi. Proprietà delle traiettorie di un moto browniano: non differenziabilità. Calcolo delle variazioni quadratiche. Legge del Logaritmo iterato. Moti Browniani in dimensione d .

Applicazione ai mercati finanziari: Sottostanti, opzioni call e put, loro valore (payoff) e significato. Prezzaggio di un'opzione mediante copertura (hedging). Modello di mercato finanziario a tempo continuo basato su un titolo non rischioso (bond) e d titoli rischiosi (stocks) guidati da d moti browniani indipendenti. Misura martingala locale equivalente. Strategie di investimento autofinanziati e strategie ammissibili. Teorema di assenza di arbitraggio. Prezzaggio e copertura di opzioni europee. Il modello di Black&Scholes (unidimensionale, con tasso d'interesse, drift e volatilità costanti). Formula esplicita per il prezzo delle opzioni call. Un modello di mercato finanziario Markoviano con drift e volatilità dipendenti dal tempo e del sottostante. Formula di rappresentazione per il prezzo delle opzioni Europee e per la strategia di copertura.

Prerequisites

Knowledge of probability calculus and of the theory of discrete-time stochastic processes are needed. It is useful to know definitions and first properties of L^p spaces and Hilbert spaces.

Teaching form

Lectures in the classroom, which illustrate definitions, results proofs, techniques and relevant examples. Some of the lessons will be devoted to the analysis of financial models related to mathematical theory.

During the Covid-19 emergency period, lessons will mainly be given remotely (synchronously or asynchronously) with some events in presence whenever possible. The specific modalities of each lesson will be made public in

advance and will take into account the University's technical (band availability for synchronous lessons) and health indications.

Textbook and teaching resource

Lecture notes (available on the e-learning platform)

Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus, Jean-François Le Gall, Springer series Graduate Texts in Mathematics (Volume 274, 2016).

Semester

First semester.

Assessment method

Oral exam. Mark out of thirty.

The oral test evaluates the student's ability to critically review the definitions, statements and proofs presented during the course. The ability to expose a topic, among those illustrated during the course, and communicated to the student 15 minutes before the oral examination will also be evaluated.

During the Covid-19 _____

Office hours

By appointment.
