



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

SYLLABUS DEL CORSO

Teoria delle Rappresentazioni

2021-1-F4001Q072

Obiettivi

Il corso ha lo scopo di presentare i contenuti, i metodi fondamentali e alcune applicazioni della teoria 'classica' delle rappresentazioni dei gruppi finiti. Sarà posta enfasi sulla comprensione del percorso teorico e sull'esercizio dello spirito critico da parte degli studenti.

I risultati di apprendimento attesi comprendono:

- Conoscenze: le conoscenze delle risultati principale della teoria delle rappresentazioni dei gruppi finiti.
- Capacità: le capacità di applicargli ad esempi concreti.

Contenuti sintetici

Anelli e A-moduli semisemplici. Rappresentazioni e moduli. Caratteri di un gruppo finito. Prodotti tensoriali di rappresentazioni. Rappresentazioni permutazionali e applicazioni. Rappresentazioni di prodotti diretti. Induzione e restrizione di rappresentazioni. Teoria di Clifford.

Programma esteso

Anelli e A-moduli semisemplici:

Richiami generali su anelli e A-moduli. Anelli e A-moduli artiniani e noetheriani. Anelli e A-moduli semisemplici. A-moduli semplici. Decomposizione di un A-modulo semisemplice in componenti isotipiche. Struttura degli anelli

semisemplici. Teorema di Wedderburn. Proprietà del doppio centralizzante (DCP). Struttura degli anelli artiniani semplici.

Rappresentazioni e moduli:

L'algebra gruppale KG di un gruppo G . KG -moduli e rappresentazioni di G . Rappresentazioni completamente riducibili, teorema di Maschke. Rappresentazioni su splitting fields (KG semisemplice e split): struttura di KG . Teorema di Frobenius-Schur. Esempi di rappresentazioni complesse di gruppi finiti.

Caratteri di un gruppo finito:

Definizioni generali e proprietà elementari dei caratteri di un gruppo G . Lo spazio $CF(G)$ delle funzioni di classe. $\text{Car } K = 0$ e K splitting per G : caratteri e moduli; tavola dei caratteri. Rappresentazione regolare, idempotenti ortogonali, prime relazioni di ortogonalità fra i caratteri. Caso semisemplice e split: $\text{Irr}(G)$ è una base ortonormale di $CF(G)$; seconde relazioni di ortogonalità fra i caratteri.

Interi algebrici e caratteri:

costanti di struttura del centro di KG . Il grado di un carattere irriducibile è un divisore dell'ordine di G . Applicazioni alla teoria dei gruppi: il $p^a \cdot q^b$ -teorema di Burnside. Proprietà strutturali di un gruppo deducibili dalla tavola dei caratteri. [Cenni alle rappresentazioni dei gruppi compatti.] Prodotti tensoriali di rappresentazioni: Generalità sui prodotti tensoriali di moduli. Prodotti tensoriali di rappresentazioni, prodotti di caratteri. L'anello dei caratteri virtuali. Teorema di Burnside-Brauer. Applicazioni al conteggio di involuzioni, teorema di Brauer-Fowler e sue conseguenze. Rappresentazioni permutazionali e applicazioni: Richiami sui gruppi di permutazioni. Azioni su classi di coniugio e caratteri. Lemma permutazionale di Brauer. Caratteri reali. Rappresentazioni di prodotti diretti: Caratteri irriducibili di un prodotto diretto. Applicazione: teorema di Burnside sul grado di un carattere. Induzione e restrizione di rappresentazioni, teoria di Clifford. Rappresentazioni indotte da sottogruppi. Caratteri indotti. Proprietà dell'induzione, legge di reciprocità di Frobenius e sue applicazioni. Restrizione di una rappresentazione a un sottogruppo normale: teoria di Clifford. Gruppo d'inerzia di una rappresentazione; corrispondenza di Clifford. Teorema di Ito.

Prerequisiti

Sono prerequisiti i contenuti standard di un corso annuale di algebra (Algebra I e Algebra II), e qualche conoscenza ulteriore di teoria dei campi.

Modalità didattica

Lezione frontale, 8 CFU

Materiale didattico

C. W. Curtis and I. Reiner, Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, Wiley Interscience 1962.

C. W. Curtis and I. Reiner, *Methods of Representation Theory I*, Wiley 1981.

L. Dornhoff, *Group Representation Theory*, Marcel Dekker 1971.

B. Huppert, *Character Theory of Finite Groups*, de Gruyter 2011.

I.M. Isaacs, *Character theory of finite groups*, Academic Press 1976

Periodo di erogazione dell'insegnamento

1° semestre

Modalità di verifica del profitto e valutazione

L'esame è orale e consiste di un colloquio con valutazione in trentesimi. Si articola in una serie di quesiti orali volti a verificare la conoscenza e la padronanza da parte dello studente degli snodi teorici e dei teoremi con relative dimostrazioni svolti a lezione.

Fino all'esaurimento della corrente emergenza sanitaria, l'esame orale si svolgerà in modo remoto mediante la piattaforma "webex", con accesso reso disponibile sulla pagina elearning dell'insegnamento.

Orario di ricevimento

Su appuntamento.
