UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

# COURSE SYLLABUS

## Mathematical Analysis I

**2122-1-E3001Q033**

### Obiettivi

- Conoscere e comprendere i concetti di base e la teoria, sviluppata in modo rigoroso, dell'Analisi Matematica moderna per funzioni di una variabile reale.
- Acquisire una padronanza dei contenuti e delle tecniche tale da permettere la soluzione di problemi e la loro applicazione a contesti diversi.
- Acquisire la capacità di elaborazione critica e autonoma dei concetti fondamentali appresi.
- Essere in grado di esporre in modo preciso, rigoroso ad esaustivo sia le conoscenze teoriche acquisite che le soluzioni, sviluppate in autonomia, di esercizi e problemi.
- Acquisire i prerequisiti necessari per la comprensione dei contenuti dei successivi corsi erogati all'interno del Corso di Laurea in Matematica.

### Contenuti sintetici

Numeri reali e complessi. Funzioni reali di variabile reale: limiti, continuità, calcolo differenziale, calcolo integrale. Successioni e serie numeriche.

### Programma esteso

1. **I numeri naturali.** Assiomi di Peano e il principio di induzione matematica. Simboli di sommatoria, produttoria e fattoriale, coefficienti binomiali, sviluppo della potenza n–esima del binomio (formula del binomio di Newton)**.**
2. **I numeri reali.** Campi, campi ordinati e i numeri razionali. Completezza e assioma di continuità. Incompletezza dei numeri razionali. Definizione assiomatica dei numeri reali. Cenni alle sezioni di Dedekind. I numeri naturali come sottoinsieme dei numeri reali. Proprietà archimedea. Estremo superiore/inferiore e loro proprietà. Esistenza dell’estremo superiore/inferiore. Esistenza e unicità delle

radici n–esime. Rappresentazione binaria e rappresentazione decimale. Parte intera e modulo di un numero reale. Definizione di potenza con esponente naturale, intero, razionale e reale.

3. **I numeri complessi.** Definizione, forma algebrica, modulo, complesso coniugato, parte reale e parte immaginaria, disuguaglianza triangolare. Forma trigonometrica ed esponenziale di un numero complesso, prodotto e potenza in forma trigonometrica/esponenziale. Funzione esponenziale ed esponenziale complesso. Radici di un numero complesso. Teorema fondamentale dell'algebra (solo enunciato).

4. **Topologia della retta reale.** Definizione di distanza sulla retta reale, intorni, punti interni, esterni e di frontiera. Insiemi aperti e chiusi. Punti di accumulazione e isolati. Densità dei numeri razionali nei numeri reali. Teorema di Bolzano–Weierstrass.

5. **Funzioni.** Definizione, dominio, codominio, immagine e controimmagine. Funzioni iniettive, suriettive e biunivoche. Funzione composta, funzione inversa, restrizione. Insiemi numerabili. Numerabilità dei numeri razionali e non numerabilità dei numeri reali. Funzioni reali di variabile reale e loro grafico. Funzioni monotone, estremo superiore e inferiore, massimo e minimo, punti di massimo e di minimo. Funzioni elementari e loro grafici (richiami sulle potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche e le loro inverse, valore assoluto, parte intera, parte frazionaria, segno).

6. **Limiti.** Definizione di limite, esempi e proprietà: unicità del limite, teorema della permanenza del segno, teorema del confronto (dei due carabinieri). Limite della somma, del prodotto, del rapporto e della funzione composta. Forme indeterminate. Limiti notevoli. Limiti destri e sinistri. Teorema di esistenza del limite per funzioni monotone. Asintotico, simboli di o piccolo e O grande. Infiniti, infinitesimi e loro confronto.

7. **Successioni in campo reale.** Successioni e limiti di successioni. Limitatezza delle successioni convergenti. Sottosuccessioni. Ogni successione limitata ha una una sottosuccessione convergente. Insiemi compatti. Compattezza degli insiemi chiusi e limitati (Heine-Borel). Successioni monotone e definizione del numero *e* (costante di Nepero). Criterio di Cauchy, limite inferiore, limite superiore e loro proprietà.

8. **Continuità.** Definizione di funzione continua. Continuità della funzione composta. Teorema della permanenza del segno. Teorema degli zeri. Teorema dei valori intermedi. Continuità della funzione inversa. Continuità delle funzioni elementari: potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche e funzioni trigonometriche inverse. Teorema ponte. Teorema di Weierstrass. Continuità uniforme. Continuità uniforme di funzioni continue su compatti (Heine–Cantor). Punti di discontinuità. Funzioni Lipschitziane.

9. **Serie.** Definizione. Serie convergenti, divergenti e indeterminate. Serie geometrica e serie telescopiche. Condizione necessaria per la convergenza. Serie assolutamente convergenti e criterio della convergenza assoluta. Serie a termini positivi: criterio del confronto e del confronto asintotico, criterio della radice e criterio del rapporto. Serie a termini di segno alterno: criterio di Leibniz.

10. **Calcolo differenziale.** Retta tangente al grafico di una funzione. Derivabilità. Derivata destra e sinistra. Punti angolosi, punti a tangente verticale e cuspidi. Continuità delle funzioni derivabili. Regole di derivazione: somma, prodotto, quoziente e derivata della funzione composta. Derivata della funzione inversa. Derivata delle funzioni elementari. Punti di massimo e di minimo, relativi e assoluti. Teoremi di Fermat e di Rolle. Teorema di Lagrange e suoi corollari: le funzioni a derivata nulla su intervalli sono costanti, lipschitzianità delle funzioni a derivata limitata, relazioni tra monotonia di una funzione e segno della sua derivata. Teorema di Cauchy. Teorema di De l'Hôpital. Teorema del limite della derivata. Convessità/concavità di una funzione. Relazione tra il segno della derivata seconda e concavità/convessità di una funzione. Posizione del grafico rispetto alle sue rette tangenti. Punti di flesso. Formule di Taylor e di Maclaurin con resto in forma di Peano ed esempi. Formula di Taylor con resto in forma di Lagrange.

11. **Calcolo integrale.** Funzioni a scala (o costanti a tratti o semplici) e integrale di funzioni a scala. Proprietà dell'integrale delle funzioni a scala. Integrale inferiore e integrale superiore su un intervallo limitato. Definizione di integrabilità secondo Riemann. Condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità.

Linearità e monotonia (confronto) dell'integrale di Riemann. Integrabilità della parte positiva/negativa e del modulo di una funzione integrabile. Integrabilità della restrizione di una funzione integrabile, integrale su intervalli orientati e additività rispetto al dominio. Integrabilità delle funzioni con un numero finito di punti di discontinuità e delle funzioni monotone. Teorema della media integrale. La funzione integrale. Teorema fondamentale del calcolo. Primitive, integrale indefinito. Integrazione per parti e per sostituzione. Integrazione di funzioni razionali fratte. Integrali impropri.

## Prerequisiti

Algebra, geometria e trigonometria elementari.

## Modalità didattica

Lezioni (8 cfu), Esercitazioni (4 cfu).

Corso erogato in lingua italiana.

## Materiale didattico

**Testo di riferimento**: E. Giusti. Analisi Matematica I. Bollati Boringhieri.

**Altri testi consigliati:**

- G. De Marco: Analisi Uno, Zanichelli Decibel.
- C. D. Pagani, S. Salsa: Analisi matematica 1, Zanichelli.

**Eserciziari consigliati:**

- E. Giusti: Esercizi e complementi di analisi matematica, volume 1, Bollati Boringhieri.
- G. De Marco, C. Mariconda: Esercizi di calcolo in una variabile, Zanichelli Decibel.
- S. Salsa, A. Squellati: Esercizi di analisi matematica 1, Zanichelli.
- E. Acerbi, L. Modica, S. Spagnolo: Problemi scelti di analisi matematica. Vol. 1, Liguori.

## Periodo di erogazione dell'insegnamento

Primo anno, primo semestre.

## Modalità di verifica del profitto e valutazione

Prova scritta obbligatoria e prova orale facoltativa. Valutazione con voto in trentesimi 18-30/30.

Nella prova scritta si valutano la conoscenza dei contenuti del corso e le competenze acquisite, mediante sia la risoluzione di problemi sia l'esposizione degli enunciati e delle dimostrazioni dei teoremi, delle definizioni, degli esempi/controesempi e delle tecniche di calcolo introdotte. Verranno valutati la correttezza delle risposte, l'appropriatezza del linguaggio matematico utilizzato e il rigore e la chiarezza dell'esposizione.

La prova orale facoltativa consiste in un'interrogazione sul programma svolto e può essere sostenuta solo in caso di sufficienza nella prova scritta.

Nel corso dell'anno sono previsti 5 appelli d'esame nei seguenti periodi: due nella sessione invernale di gennaio-febbraio, uno a giugno, uno a luglio e uno a settembre.

## Orario di ricevimento

Su appuntamento.