UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

SYLLABUS DEL CORSO

Matematica II

2122-2-E3201Q040

Obiettivi

- Conoscere e comprendere i fondamenti della teoria dei numeri complessi, dell'algebra lineare, del calcolo differenziale in più variabili reali e delle equazioni differenziali.
- Essere in grado di applicare le tecniche e i metodi acquisiti sia alla soluzione di esercizi e problemi astratti che alla modellazione matematica e relativa soluzione di problemi provenienti dalle scienze sperimentali studiate all'interno del Corso di Laurea.

- Acquisire autonomia di giudizio nella applicazione delle metodologie apprese.
- Essere in grado di esporre in modo preciso ed esaustivo sia le conoscenze teoriche acquisite che le soluzioni, sviluppate in autonomia, di esercizi e problemi.
- Acquisire i prerequisiti necessari per la comprensione dei contenuti di tipo modellistico/matematico dei successivi corsi erogati all'interno del Corso di Laurea.

Contenuti sintetici

- I numeri complessi.

- Vettori in $\mathbf{R}^n$, matrici e sistemi lineari.

- Calcolo differenziale ed integrale in $\mathbf{R}^n$.

- Equazioni differenziali.

Programma esteso

I numeri complessi

Definizione. Modulo, argomento, complesso coniugato e loro proprietà. Forma algebrica e trigonometrica. Potenza e radice *n*-esima di un numero complesso, identità di Eulero. Teorema fondamentale dell'algebra.

Algebra lineare

Spazi vettoriali: somma di vettori, prodotto per uno scalare. Lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$: prodotto interno, norma di un vettore e sue proprietà. Disuguaglianza di Schwarz, disuguaglianza triangolare, combinazioni lineari, vettori dipendenti ed indipendenti. Basi e loro proprietà, dimensione di uno spazio vettoriale. Matrici e operazioni tra matrici: matrice trasposta, somma di matrici, prodotto per uno scalare e prodotto tra matrici. Applicazioni lineari. Matrici quadrate: matrice identità, determinante, matrici singolari e matrice inversa. Rango (o caratteristica) di una matrice, suo significato e sua relazione con la verifica di indipendenza di un insieme di vettori. Sistemi di equazioni lineari: metodo di eliminazione di Gauss e teorema di Rouché-Capelli. Autovalori e autovettori di matrici quadrate e loro determinazione. Matrici simmetriche e teorema spettrale. Forme quadratiche e segno di una forma quadratica. Teorema di riconoscimento del segno di una forma
quadratica in n variabili e caso particolare di 2 variabili. Relazione tra segno di una forma quadratica e segno degli autovalori della matrice associata. Relazione tra forme quadratiche definite e norma dello spazio vettoriale.

Curve

Funzioni vettoriali di una variabile reale, limiti e continuità. Curve, curve chiuse, curve semplici e curve piane. Sostegno di una curva. Derivata e versore tangente a una curva. Archi di curva regolari e regolari a tratti. Curve piane in forma polare. Lunghezza di una curva di classe $\mathbf{C}^1$ e di curve fornite in forma polare. Lunghezza di grafici di funzioni reali di variabile reale. Integrali di funzioni a valori vettoriali. Il modulo dell'integrale è minore o uguale dell'integrale del modulo. Integrali di linea di prima specie.

Calcolo differenziale per funzioni di più variabili reali

Insiemi in $\mathbf{R}^n$. Intorni sferici. Punti interni, esterni e di frontiera. Insiemi aperti: esempi e proprietà. Insiemi chiusi: esempi e proprietà. Insiemi limitati. Funzioni di più variabili reali: introduzione e primi esempi, esempio delle funzioni di stato. Grafici e insiemi di livello. Definizione e proprietà dei limiti per funzioni di più variabili. Limite infinito al finito e limite finito all'infinito. Funzioni continue e loro proprietà. Teorema di Weierstrass. Derivate parziali e gradiente, definizione di differenziabilità, legame tra differenziabilità e continuità e tra differenziabilità e derivabilità. Derivabilità lungo una direzione assegnata e formula del gradiente, significato geometrico del gradiente. Condizione sufficiente per la differenziabilità e la classe $\boldsymbol{C}^1(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$. Il differenziale primo. Derivata della funzione composta: il caso $p(\underline{x})=g(f(\underline{x}))$ con $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ e $g:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e il caso $p(t)=f(\underline{r}(t))$ con $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ e $\underline{r}:\mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$. Curve di livello e gradiente. Funzioni positivamente omogenee e teorema di Eulero, applicazione ai potenziali termodinamici. Teorema del valor medio o dell'incremento finito. Derivate di ordine superiore e matrice Hessiana. Teorema di Schwarz e la classe $\boldsymbol{C}^2$. Relazioni di Maxwell in termodinamica. Formula di Taylor con resto secondo Lagrange e con resto secondo Peano. Funzioni vettoriali di più variabili reali, matrice Jacobiana. Caso generale del teorema di derivazione della funzione composta.

Ottimizzazione

Punti estremanti. Estremi liberi e vincolati. Punti stazionari (o critici). Condizione necessaria per estremanti liberi (teorema di Fermat). Forma quadratica associata alla matrice Hessiana e suo legame con la natura dei punti critici. Retta ai minimi quadrati.

Integrali multipli

Significato geometrico e proprietà dell'integrale doppio. Domini semplici. Calcolo degli integrali doppi per riduzione su domini rettangolari e su domini semplici. Cambiamento di variabili. Formula generale per il cambiamento di variabili negli integrali doppi. Coordinate polari e cambiamento di variabili polari negli integrali doppi.

Equazioni differenziali

Definizione. Equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali con esempi. Modello di crescita esponenziale e modello logistico. Ordine di un'equazione differenziale e sistemi di equazioni differenziali. Equazioni differenziali in forma normale ed equivalenza con sistemi del primo ordine. Problema di Cauchy. Problema di Cauchy per equazioni differenziali in forma normale di ordine n. Teorema di esistenza (Peano) e teorema di esistenza e unicità locale. Soluzione delle equazioni differenziali a variabili separabili e delle equazioni differenziali lineari del primo ordine. Equazioni differenziali lineari di ordine n omogenee e non omogenee. Struttura dell'integrale generale delle omogenee e delle non omogenee. Soluzione delle equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti. Equazioni differenziali associate al circuito *RLC* e all'oscillatore armonico smorzato e rispettivi integrali generali. Soluzione particolare di un equazione lineare a coefficienti costanti non omogenea quando il termine non omogeneo è un polinomio o un esponenziale reale/complesso (metodo di somiglianza). Soluzione particolare dell'equazione associata al circuito *RLC* con forzante periodica. Cenni alla soluzione qualitativa delle equazioni differenziali autonome: singole equazioni e sistemi $2X2$. Analisi qualitativa delle soluzioni dei seguenti modelli: equazione logistica; equazione logistica con estinzione e raccolta; modello di Lotka-Volterra preda predatore; modello per due specie in competizione.

Prerequisiti

Calcolo differenziale e integrale per funzioni reali di una variabile reale. Non vi sono propedeuticità formali, ma è necessario conoscere e saper maneggiare i contenuti del corso di Matematica I per poter seguire il corso con profitto.

Modalità didattica

Lezioni frontali (erogate in lingua italiana), 6 cfu (48 ore)

Esercitazioni (erogate in lingua italiana), 2 cfu (20 ore)

Materiale didattico

Matematica Generale, A. Guerraggio, Bollati Boringhieri. (Numeri complessi e Algebra lineare)

Analisi Matematica II, M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, ZANICHELLI. (Calcolo differenziale in più variabili ed equazioni differenziali)

Esercitazioni di Analisi Matematica 2, M. Bramanti, Esculapio, Bologna. (Esercizi)

Pagina elearning del corso: https://elearning.unimib.it/course/view.php?id=24206

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Primo semestre

Modalità di verifica del profitto e valutazione

L’esame è strutturato in due prove.

1) **Prova pratica** (scritta): In questa prova viene valutata la conoscenza dei contenuti del corso e la capacità di applicarli alla risoluzione di esercizi e problemi. Si richiede di risolvere alcuni esercizi/problemi, di solito 6. Ogni esercizio vale 5 punti se non diversamente specificato. Vanno svolti in 120 minuti, giustificando per bene tutti i passaggi. Per essere ammessi alla prova teorica è necessario ottenere un punteggio di almeno 16.

2) **Prova teorica**:

La prova teorica consiste in due parti. La prima parte è costituita da 4 domande aperte (scritte). La seconda parte consiste in un colloquio di discussione della prima parte e su tutti gli argomenti svolti a lezione. Viene valutata la capacità di esporre chiaramente gli enunciati, le dimostrazioni di alcuni teoremi, le definizioni e le tecniche di calcolo introdotte. Per superare l'esame si deve ottenere un punteggio di almeno 16 sia nella prova pratica che in quella teorica, inoltre la media aritmetica dei due punteggi deve essere di almeno 18. Tale media aritmetica costituisce il voto finale dell'esame.

• **Prove parziali**: Durante il periodo delle lezioni si svolgono di norma due prove parziali che sostituiscono, in caso di superamento, la prova pratica. Per avere accesso alla prova teorica occorre aver riportato una votazione minima di punti 14 in ciascuna prova parziale. Le prove parziali sono costituite ciascuna da 10 problemi a risposta chiusa con il seguente punteggio. Risposta corretta: 3 punti ; risposta errata: ?1 punti ; risposta non data: 0 punti.

Orario di ricevimento

Su appuntamento