UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

COURSE SYLLABUS

Complex Analysis

2122-3-E3501Q057

Obiettivi

Il corso ha lo scopo di insegnare le nozioni e le tecniche di base dell'Analisi complessa e di mettere gli studenti in grado di utilizzarle con profitto in applicazioni teoriche e pratiche.

Più specificamente, i risultati di apprendimento attesi comprendono:

- la conoscenza e la comprensione delle definizioni e degli enunciati fondamentali, nonché delle strategie di dimostrazione basilari proprie dell'Analisi complessa
- la capacità di applicare il bagaglio di conoscenze sopra descritte alla costruzione di esempi concreti e alla risoluzione di esercizi aventi diversi gradi di difficoltà (a partire da semplici esercizi di applicazione delle definizioni e dei risultati illustrati nel corso fino a esercizi che richiedono la capacità di sviluppare in modo originale concetti appresi nel corso).

Contenuti sintetici

Si tratta di un corso di base sulle funzioni di una variabile complessa. Contiene, tra l'altro, nozioni di base relative alle funzioni olomorfe, al teorema di Cauchy e alle sue applicazioni, alla teoria delle singolarità isolate e degli zeri di funzioni olomorfe. Il corso si concluderà con un'introduzione alla congettura di Riemann, la più famosa tra le congetture aperte in Matematica.

Programma esteso

Parte 1. Preliminari all'analisi complessa. Funzioni olomorfe. Regioni. Funzioni olomorfe: definizione ed esempi. Funzioni intere. Funzioni a valori complessi visti come mappe. Funzioni olomorfe e funzioni differenziabili da R 2 in sé. Condizioni di Cauchy–Riemann. Serie di potenze. Serie di potenze. Formula di Hadamard per il raggio di convergenza di una serie di potenze. Serie di e z , sin z e cos z. Le serie di potenze definiscono funzioni olomorfe all'intero del loro cerchio di convergenza. Integrazione lungo curve. Curve parametriche, curve parametriche lisce, curve parametriche regolari a pezzi, curve parametriche equivalenti. Curve lisce, curve regolari a pezzi. Orientazione. Integrazione lungo curve e sue proprietà. Primitiva di una funzione e proprietà dell'integrale di funzioni che ammettono primitive. Funzioni con derivata nulla in una regione sono costanti.

Parte 2. Il teorema di Cauchy e applicazioni. Il lemma di Goursat. Il lemma di Goursat per triangoli. Analogo per rettangoli. Esistenza di primitive locali e il teorema di Cauchy per un disco. Esistenza di primitive di una funzione olomorfa in un disco. Teorema di Cauchy in un disco. Contorni giocattolo e teorema di Cauchy relativo. Calcolo di alcuni integrali. Esempi di calcolo di integrali utilizzando il teorema di Cauchy. Formula integrale di Cauchy. Formula integrale di Cauchy per un disco. Analogo per contorni giocattolo. Formula di Cauchy per le derivate. Disuguaglianze di Cauchy. Le funzioni olomorfe sono localmente somma di serie di potenze. Teorema di Liouville. Teorema fondamentale dell'algebra. Principio di identità delle funzioni olomorfe e prolungamento analitico. Ulteriori applicazioni. Il teorema di Morera. Convergenza uniforme sui compatti di successioni di funzioni olomorfe. Funzioni olomorfe definite mediante integrali. Il principio di simmetria (Teorema 5.5) e il principio di riflessione di Schwarz. Il problema dell'approssimazione mediante polinomi e il teorema di Runge.

Parte 3. Funzioni meromorfe e il logaritmo. Zeri e poli. Forma di una funzione olomorfa in un intorno di un suo zero. Molteplicità di uno zero, zeri semplici. Polo di una funzione olomorfa. Forma di una funzione olomorfa in un intorno di un suo polo. Ordine del polo, parte principale e residuo. Formula per il residuo di un polo di ordine n. Formula dei residui. Il teorema dei residui. Esempi di applicazione del teorema dei residui. Singolarità e funzioni meromorfe. Singolarità rimovibili. Il teorema di Riemann sulle singolarità rimovibili. Caratterizzazione dei poli. Singolarità essenziali. Comportamento di una funzione in un intorno di una singolarità essenziale: il teorema di Casorati–Weierstrass. Funzioni meromorfe in una regione. Singolarità all'infinito. Caratterizzazione delle funzioni meromorfe nel piano complesso esteso. Il principio dell'argomento e applicazioni. Il principio dell'argomento. Il teorema di Rouché. Teorema della mappa aperta. Teorema del massimo modulo. Omotopie e domini semplicemente connessi. Integrazione di funzioni olomorfe su curve omotope. Domini semplicemente connessi. Esistenza di primitive di funzioni olomorfe e teorema di Cauchy in domini semplicemente connessi. Il logaritmo complesso. Esistenza del logaritmo in una regione semplicemente connessa. Determinazione principale del logaritmo. Serie di potenze del logaritmo. Esistenza del logaritmo di una funzione che non si annulla in una regione semplicemente connessa.

Parte 4. Funzioni intere. La formula di Jensen. Teorema di Jensen. Funzioni di ordine finito. Ordine di una funzione intera. Relazione tra ordine di una funzione intera e suoi zeri. Prodotti infiniti. Definizione di convergenza di un prodotto infinito. Condizione sufficiente di convergenza. Convergenza di prodotti di funzioni olomorfe. La formula prodotto della funzione seno. Prodotti infiniti di Weierstrass. Esistenza di una funzione intera con zeri prescritti. Il teorema di fattorizzazione di Hadamard. Fattorizzazione di funzioni intere di ordine finito.

Parte 5. La funzione Gamma di Eulero e sue proprietà. La funzione zeta di Riemann: suo prolungamento analitico. Introduzione alla congettura di Riemann.

Prerequisiti

I prerequisiti richiesti sono trattati nei corsi di Analisi I, Analisi II, Algebra lineare e Teoria della misura della Laurea triennale in Matematica e sono i seguenti: calcolo differenziale e integrale per funzioni di una e più variabili reali, elementi di base di algebra lineare, la teoria dell'integrale di Lebesgue, con particolare riferimento ai teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale e al Teorema di Fubini-Tonelli.

Gli studenti non in possesso dei requisiti sopra elencati sono invitati a contattare tramite posta elettronica il docente, che provvederà a dare indicazioni bibliografiche utili a colmare le lacune e a fornire eventuale ulteriore supporto.

Modalità didattica

In condizioni normali le lezioni saranno frontali, con uso di lavagna.

Materiale didattico

Stein and Shakarchi, “Complex analysis”, Princeton University Press

Esercizi, messi a disposizione dal docente sulla piattaforma e-learning.

Periodo di erogazione dell'insegnamento

I semestre

Modalità di verifica del profitto e valutazione

Prova scritta, contenente domande di carattere teorico (dimostrazioni di parte dei risultati discussi a lezione) ed esercizi di applicazione della teoria, sovente di tipo simile a quelli illustrati durante le esercitazioni. Una valutazione sufficiente dell'elaborato presuppone che sia la valutazione delle conoscenze teoriche richieste, sia quella delle abilità necessarie allo svolgimento degli esercizi di applicazione della teoria risultino sufficienti.

La valutazione terrà conto dell'esattezza delle risposte, della chiarezza espositiva e della proprietà di linguaggio matematico utilizzato.

Orario di ricevimento

Per appuntamento.