UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

SYLLABUS DEL CORSO

Calcolo delle Probabilità

2122-3-E3501Q014

Obiettivi

Fornire gli strumenti e i concetti di base del calcolo delle probabilità, arricchiti da una selezione di modelli e applicazioni.

Al termine del presente insegnamento, lo studente avrà acquisito le seguenti:

- *conoscenze*: linguaggio, definizioni e risultati fondamentali della teoria della probabilità;
- *competenze*: comprensione operativa delle principali tecniche di dimostrazione;

- *abilità*: capacità di applicare le nozioni teoriche per la risoluzione di esercizi e l'analisi di problemi.

Contenuti sintetici

Nella prima parte viene presentata la modellistica matematica dei fenomeni casuali per mezzo degli **spazi di probabilità**, secondo gli assiomi di N. Kolmogorov basati sulla teoria della misura. Vengono quindi studiate in dettaglio le **variabili aleatorie**, che costituiscono il "linguaggio operativo" del calcolo delle probabilità.

La seconda parte si apre con lo studio delle diverse **nozioni di convergenza** per successioni di variabili aleatorie. Vengono quindi presentati i **teoremi limite** fondamentali del calcolo delle probabilità: la *legge dei grandi numeri* e il *teorema limite centrale*. L'insegnamento si conclude con un'introduzione alle **catene di Markov**, una delle classi più semplici e allo stesso tempo importanti di processi stocastici.

Lungo tutto lo svolgimento dell'insegnamento, la presentazione della teoria è accompagnata dalla discussione di numerosi **modelli e applicazioni**.

Programma esteso

1. *Spazi di probabilità*

- Introduzione alla probabilità
- Assiomi della probabilità
- Proprietà di base della probabilità
- Calcolo combinatorio e spazi uniformi
- Probabilità condizionale

- Indipendenza di eventi

2. *Variabili aleatorie*

- Richiami di teoria della misura
- Distribuzioni notevoli discrete e assolutamente continue
- Variabili aleatorie
- Leggi marginali e legge congiunta
- Indipendenza di variabili aleatorie
- Trasformazioni di variabili aleatorie
- Valore medio, momenti, varianza e covarianza

- Spazi L^p e disuguaglianze
- Correlazione e regressione lineare (cenni)

3. *Convergenza e teoremi limite*

- Richiami sui teoremi di convergenza
- Lemma di Borel-Cantelli
- Legge debole e forte dei grandi numeri

- Nozioni di convergenza per variabili aleatorie
- Convergenza debole di probabilità
- Legge dei piccoli numeri
- Teorema limite centrale e approssimazione normale
- Legge 0-1 di Kolmogorov

4. *Catene di Markov*

- Introduzione ai processi stocastici
- Catene di Markov e proprietà di base

- Stati ricorrenti e transitori
- Misure invarianti e reversibili
- Teoremi di convergenza (cenni)
- Probabilità di assorbimento (cenni)

- Passeggiate aleatorie su grafi (cenni)

5. *Modelli e applicazioni (presentati in parallelo alla teoria)*

- Paradossi classici (compleanni, Monty-Hall, Borel, Bertrand)
- Permutazioni aleatorie e punti fissi
- Concentrazione del volume in alte dimensioni
- Il teorema di approssimazione di Weierstrass
- Simulazione di variabili aleatorie
- Passeggiata aleatoria semplice
- Rovina del giocatore
- L'algoritmo PageRank

Prerequisiti

Le conoscenze, competenze e abilità impartite negli insegnamenti dei primi due anni, in particolare *Algebra Lineare*, *Analisi 1 e 2*, *Teoria della Misura*.

Modalità didattica

L'insegnamento si articola in lezioni ed esercitazioni frontali:

- nelle lezioni teoriche (10 cfu) si fornisce la conoscenza di definizioni, risultati ed esempi rilevanti, in parallelo alle competenze relative alla loro comprensione;
- nelle esercitazioni (2 cfu) si forniscono abilità necessarie per applicare le conoscenze e competenze teoriche alla risoluzione di esercizi.

L'insegnamento è erogato in lingua italiana.

Materiale didattico

Libri di riferimento

- F. Caravenna, P. Dai Pra. *Probabilità. Un'introduzione attraverso modelli e applicazioni.* Seconda Edizione (2021), Springer-Verlag Italia.
- D. F. Anderson, T. Seppäläinen, B. Valkó. *Introduction to Probability*. Cambridge University Press (2018).
- J. Jacod, P. Protter. *Probability Essentials*. 2nd Edition, Springer (2003).

Altro materiale didattico (disponibile sulla pagina e-learning)

- Dispense del docente su argomenti specifici
- Fogli di esercizi settimanali (con soluzioni dettagliate)
- Testi delle prove scritte degli anni passati (con soluzioni dettagliate)

- Elenco delle dimostrazioni per la prova orale
- Appunti delle lezioni

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Terzo anno, primo semestre.

Modalità di verifica del profitto e valutazione

Prova scritta - o prove parziali - e prova orale, con le modalità descritte qui sotto. Gli aspetti valutati in ciascuna prova sono l'esattezza delle risposte, la creatività, la precisione, la chiarezza espositiva.

Ci saranno 5 appelli d'esame (due a febbraio, uno a giugno, uno a luglio, uno a settembre).

- La *prova scritta* ha una durata di tre ore e riceve una valutazione in trentesimi. Nella prova vengono valutate sia conoscenze e competenze teoriche (definizioni, esempi e controesempi) sia abilità pratiche (soluzione di esercizi). La prova scritta risulta superata col punteggio minimo di 15/30 e permette di accedere alla prova orale.
- A metà e alla fine dell'insegnamento sono previste due *prove parziali*, con struttura analoga alla prova scritta, della durata di un'ora e mezza ciascuna, valutate in quindicesimi. Il superamento di entrambe le prove parziali col punteggio minimo di 7,5/15 equivale al superamento della prova scritta (con la "somma" dei punteggi ottenuti) e permette di accedere alla prova orale.

- La *prova orale* ha una durata di 30-45 minuti e riceve una valutazione in trentesimi. Nella prova viene valutata la conoscenza di una selezione di dimostrazioni e la conoscenza operativa delle nozioni presentate. La prova orale risulta superata col punteggio minimo di 15/30.
- La valutazione finale risulta dalla media delle valutazioni della prova scritta e della prova orale. L'esame risulta superato col punteggio minimo di 18/30.

Esonero dalla prova orale. Chi supera la prova scritta con un punteggio compreso tra 20/30 e 27/30 può rinunciare a sostenere la prova orale, registrando il voto ottenuto nella prova scritta; con un punteggio superiore a 27/30 è ancora possibile rinunciare a sostenere la prova orale, ma in questo caso il voto registrato sarà di 27/30; infine, con un punteggio inferiore a 20/30, è necessario sostenere la prova orale.

Orario di ricevimento

Su appuntamento.