UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

COURSE SYLLABUS

Geometry II

2122-2-E3501Q011

Obiettivi

Lo scopo dell'insegnamento è introdurre la teoria e l'utilizzo delle forme differenziali e della loro integrazione nel contesto degli spazi euclidei e dei loro sottoinsiemi aperti, come premessa della generalizzazione alle varietà differenziali.

Le forme differenziali sono uno strumento pervasivo e di importanza fondamentale in Geometria, Topologia Differenziale e Analisi; sono inoltre uno strumento imprescindibile nella formulazione della Fisica moderna.

La teoria verrà sviluppata dai suoi principi primi algebrici, ossia dalla nozione di tensore in algebra lineare.

I risultati di apprendimento attesi includono:

- Conoscenze: la conoscenza e la comprensione delle definizioni e degli enunciati fondamentali, nonché delle strategie di dimostrazione basilari utilizzate nella teoria delle forme differenziali; la conoscenza e la comprensione di alcune sue applicazioni, in particolare allo studio di mappe lisce proprie tra aperti in spazi euclidei e del loro grado; la conoscenza e la comprensione di alcuni esempi chiave in cui si esplica la teoria;
- Capacità: la capacità di applicare le conoscenze astratte acquisite alla risoluzione di semplici esercizi di calcolo e problemi teorici, richiamando in modo corretto e conseguente i risultati utilizzati; la capacità di maneggiare il calcolo algebrico, differenziale e integrale delle forme differenziali e di utilizzarlo nello studio di alcune semplici situazioni concrete, quali lo studio di mappe proprie; la capacità di applicare il bagaglio concettuale appreso alla costruzione e discussione di esempi concreti e alla risoluzione di esercizi; la capacità di esporre, comunicare e argomentare in modo chiaro, pertinente e preciso i contenuti teorici del corso.

Contenuti sintetici

Algebra multilineare alternante; forme differenziali sullo spazio euclideo e loro operazioni; Lemma di Poincaré; applicazioni alla fisica; integrazione; cambiamento di variabili; grado di una mappa liscia propria tra aperti euclidei e sue applicazioni; Teoremi di Gauss-Green e Stokes; teoria di De Rham (brevi cenni).

Programma esteso

Algebra esterna di uno spazio vettoriale e sue operazioni; prodotto esterno e contrazioni; spazi vettoriali orientati euclidei e loro elementi di volume; campi vettoriali e forme differenziali; differenziale esterno; forme chiuse e forme esatte; numero di avvolgimento e applicazioni; gradiente, rotore, divergenza; forme differenziali e mappe lisce: tirato-indietro; integrazione; integrazione e omotopia; formula del cambiamento di variabili; Lemma di Poincaré; Lemma di Poincaré a supporto compatto; integrazione su sottovarietà orientate; Teoremi di Gauss-Green e Stokes; grado di una mappa liscia propria tra aperti di uno spazio euclideo e tecniche di calcolo; invarianza per omotopie proprie liscie; applicazioni: il Teorema Fondamentale dell'Algebra e il Teorema del Punto Fisso di Brower.

Prerequisiti

Il contenuto dei corsi di Geometria I, di Analisi I e (in parte) II, di Algebra Lineare e Geometria.

Modalità didattica

Lezioni frontali alla lavagna (6 CFU) ed esercitazioni frontali alla lavagna (2 CFU).

Materiale didattico

Testi di riferimento: appunti del docente su e-learning

Letture consigliate:

un testo particolarmente attinente al contenuto del corso è il seguente:

- V. Guillemin and P. Haine, Differential forms, World Scientific 2019

Altre letture consigliate sono:

- M. Do Carmo, Differential forms and applications, Springer Verlag 1996;
- V. Guillemin, A. Pollack, Differential Topology 1974;
- W. Fulton, Differential Topology, a first course, Springer Verlag 1995.

Periodo di erogazione dell'insegnamento

II semestre

Modalità di verifica del profitto e valutazione

L'esame può sostenuto o utilizzando le due prove parziali *in itinere*, ovvero negli appelli regolari.

Le prove parziali scritte consistono in una combinazione flessibile di esercizi e di domande teoriche, ciascuna delle quali verte su una parte del programma (la prima e la seconda). L'esatta suddivisione per argomenti verrà comunicata con congruo anticipo durante lo svolgimento del corso. L'esame si concluderà con una discussione scritta delle prove (vedi sotto).

L'esame negli appelli regolari consiste sempre di due prove scritte, ma di tipologia diversa: una prova 'pratica' e una prova 'teorica', seguite comunque da una discussione orale delle stesse.

La prova pratica è propedeutica alla prova teorica.

Ciascuna delle due prove scritte di ogni appello regolare verte sull'intero programma del corso. Nella prova pratica verranno sottoposti agli studenti degli esercizi computazionali, mentre nella prova teorica verranno proposte delle domande su definizioni, enunciati di teoremi, dimostrazioni, costruzione di esempi e controesempi e semplici problemi teorici.

Sia nel caso delle prove parziali in itinere sia in quello degli appelli regolari, lo scopo della discussione conclusiva è di norma esporre allo studente la correzione dei suoi elaborati; in casi particolari, in cui lo svolgimento non permetta di evincere appieno la qualità della preparazione dello studente, la discussione può concorrere anch'essa alla valutazione finale.

Nelle prove pratiche verrà valutata la capacità dello studente di maneggiare con padronanza e precisione il formalismo introdotto e di utilizzarlo per eseguire semplici calcoli, nonché di mettere all'opera le conoscenze teoriche trasmesse, richiamandole in modo preciso e pertinente.

Nelle prove teoriche verranno valutate la conoscenza e la comprensione dell'impianto concettuale del corso, nonché la capacità di organizzare in modo lucido, efficace e ben strutturato un'esposizione coerente e puntuale.

Per superare l'esame, lo studente deve prima sostenere una prova pratica, ottenendo una votazione di almeno 18/30, quindi ottenere la sufficienza di 18/30 anche **nella prova teorica del medesimo appello ovvero, a sua scelta, dell'appello immediatamente successivo**. La prova pratica e quella teorica concorrono in egual misura al voto finale.

A ogni esercizio/quesito (o problema) teorico di ciascuna prova verrà attribuito un punteggio parziale massimo, in ragione della sua difficoltà e lunghezza; nella valutazione dello studente verrà assegnato un punteggio in corrispondenza di ogni esercizio/quesito (o problema) teorico non superiore a quello massimo previsto, in ragione dell'esattezza, della completezza, del rigore, della chiarezza e dell'organicità dello svolgimento.

Orario di ricevimento

Su appuntamento.