UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

COURSE SYLLABUS

Stochastic Calculus and Finance

2122-1-F4001Q107

Aims

The course aims at providing the student with the definitions and basic properties of the Brownian motion and the fundamental results of the theory of stochastic differential equations. Particular emphasis will be given on the interactions between stochastic differential equations and partial differential equations, and on the applications to the modeling of financial derivatives.

At the end of the course students will have acquired the following:

- *knowledge*: language, definitions and statements of the fundamental results about Brownian motion and stochastic differential equations;
- *competence*: operational understanding of the main proof techniques and of the main financial models to which the theory can be applied;
- *skills*: ability to apply theoretical notions to the analysis of problems and models.

Contents

Introduction to stochastic processes in continuous time
Levy processes and Brownian motion
Ito stochastic integral
Ito's formula
Stochastic differential equations (SDEs)

The associated Kolmogorov differential operator
The Kolmogorov PDE and the Feynman-Kac formula
Introduction to continuous time financial markets
The Black and Scholes formula and the pricing of European options

Detailed program

Il moto browniano. Definizione di processo stocastico. Spazio delle traiettorie, insiemi cilindrici, sigma-algebra prodotto. Legge di un processo stocastico e leggi finito-dimensionali. Vettori aleatori normali. Processi stocastici gaussiani. Definizione di moto browniano. Costruzione del moto Browniano a partire dal Teorema di esistenza di Daniell-Kolmogorov e utilizzando il Teorema di continuità di Kolmogorov. Caratterizzazione del MB come processo gaussiano. Proprietà di invarianza (riflessione spaziale, traslazione e riflessione temporale, riscalamento diffusivo, inversione temporale). Moti Browniani rispetto alla filtrazione naturale e rispetto a una filtrazione qualsiasi. Proprietà delle traiettorie di un moto browniano: non differenziabliltà. Calcolo delle variazione quadratica. Legge del Logaritmo iterato. Moti Browniani in dimensione d.

Processi di Lévy. Generalità sulle filtrazioni (*F*t) indicizzate da un insieme continuo. Filtrazione naturale di un processo stocastico, processi adattati a una filtrazione. Continuità a destra e completezza per una filtrazione (definizione di *F*t+), ampliamento standard. Processi di Lévy rispetto a una filtrazion. Esempi: processo di Poisson, processo di Poisson composto. Indipendenza da *F*0 di un processo di Lévy rispetto a una filtrazione (*F*t). Legge 0-1 di Blumenthal. Tempi d'arresto proprietà di Markov forte.

L'integrale di Ito: Modificazione e indistinguibilità per processi stocastici. Continuità e misurabilità per processi stocastici. Tempi d'arresto. La sigma algebra degli eventi antecedenti a un tempo d'arresto. Martingale a tempo continuo, esempi, modificazioni continue da destra (solo enunciato), teorema d'arresto e disuguaglianza massimale. Processi progressivamente misurabili. I processi semplici, L'integrale di Ito per i processi semplici. L'estensione a M^2 e l'estensione a M^2. Proprietà: località, esistenza della versione a traiettorie continue, proprietà di Martingala. Variazione quadratica. Integrale di Ito di processi a traiettorie continue e somme di Riemann. L'integrale di Wiener. Martingale locali.

La formula di Ito. La formula di Ito per il moto browniano, con dimostrazione. Processi di Ito. Formula di Ito per processi di Ito generali. Applicazione della formula di Ito, Moto browniano geometrico e supermartingala esponenziale. La formula di Ito nel caso multidimensionale. Funzioni armoniche e problema di Dirichlet. Il Teorema di Girsanov. Esempio: il processo di Ornstein-Ühlenbeck. Il Teorema di rappresentazione delle martingale browniane.

Equazioni differenziali stocastiche. Esistenza forte e debole, unicità pathwise e in legge. : Il Teorema di Yamada-Watanabe. Esistenza forte (sketch di dimostrazione) e unicità pathwise (dimostrazione) sotto ipotesi Lipschitz. Proprietà di flusso. Il semigruppo di Kolmogorov. L'equazione alle derivate parziali di Kolmogorov. La formula di Feynamn-Kac.

Applicazione ai mercati finanziari: Sottostanti, opzioni call e put, loro valore (payoff) e significato. Prezzaggio di un'opzione mediante copertura (hedging). Modello di mercato finanziario a tempo continuo basato su un titolo non rischioso (bond) e d titoli rischiosi (stocks) guidati da d moti browniani indipendenti. Misura martingala locale equivalente. Strategie di investimento autofinanzianti e strategie ammissibili. Teorema di assenza di arbitraggio. Prezzaggio e copertura di opzioni europee. Il modello di Black&Scholes (unidimensionale, con tasso d'interesse, drift e volatilità costanti). Formula esplicita per il prezzo delle opzioni call. Un modello di mercato finanziario Markoviano con drift e volatilità dipendenti dal tempo e del sottostante. Formula di rappresentazione per il prezzo delle opzioni Europee e per la strategia di copertura.

Prerequisites

Knowledge of probability calculus and of the theory of discrete-time stochastic processes are needed. It is useful to know definitions and first properties of L^p spaces and Hilbert spaces.

Teaching form

Lectures in the classroom, which illustrate definitions, results proofs, techniques and relevant examples. Some of the lessons will be devoted to the analysis of financial models related to mathematical theory.

Textbook and teaching resource

Lecture notes (available on the e-learning platform)

Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus, Jean-François Le Gall, Springer series Graduate Texts in Mathematics (Volume 274, 2016).

Semester

First semester.

Assessment method

Oral exam. Mark out of thirty.

The oral test evaluates the student's ability to critically review the definitions, statements and proofs presented during the course. The ability to expose a topic, among those illustrated during the course, and communicated to the student 15 minutes before the oral examination will also be evaluated.

Office hours

By appointment.