UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

SYLLABUS DEL CORSO

Calcolo Stocastico e Finanza

2122-1-F4001Q107

Obiettivi

L'insegnamento si propone di fornire allo studente le definizioni e le proprietà di base del moto browniano e risultati più importanti della teoria delle equazioni differenziali stocastiche. Verrà posta particolare enfasi sulle interazioni tra equazioni differenziali stocastiche e equazioni alle derivate parziali, e sulle applicazioni alla modellizzazione dei derivati finanziari.

Al termine del corso lo studente avrà acquisito le seguenti:

- *conoscenze*: linguaggio, definizioni ed enunciati dei risultati fondamentali sul moto browniano e sulle equazioni differenziali stocastiche;
- *competenze*: comprensione operativa delle principali tecniche dimostrative e dei principali modelli finanziari in cui la teoria viene applicata;
- *abilità*: capacità di applicare le nozioni teoriche per l'analisi di problemi e modelli.

Contenuti sintetici

- Introduzione ai processi stocastici a tempo continuo
- I processi di Levy e il moto Browniano
- L'integrale stocastico di Ito
- La formula di Ito
- Equazioni differenziali stocastiche

- L'operatore differenziale di Kolmogorov associato
- La PDE di Kolmogorov e la formula di Feynman-Kac
- Cenni sui mercati finanziari a tempo continuo
- La formula di Balck e Scholes e il prezzaggio di opzioni europee

Programma esteso

Il moto browniano. Definizione di processo stocastico. Spazio delle traiettorie, insiemi cilindrici, sigma-algebra prodotto. Legge di un processo stocastico e leggi finito-dimensionali. Vettori aleatori normali. Processi stocastici gaussiani. Definizione di moto browniano. Costruzione del moto Browniano a partire dal Teorema di esistenza di Daniell-Kolmogorov e utilizzando il Teorema di continuità di Kolmogorov. Caratterizzazione del MB come processo gaussiano. Proprietà di invarianza (riflessione spaziale, traslazione e riflessione temporale, riscalamento diffusivo, inversione temporale). Moti Browniani rispetto alla filtrazione naturale e rispetto a una filtrazione qualsiasi. Proprietà delle traiettorie di un moto browniano: non differenziabliltà. Calcolo delle variazione quadratica. Legge del Logaritmo iterato. Moti Browniani in dimensione d.

Processi di Lévy. Generalità sulle filtrazioni (*F*t) indicizzate da un insieme continuo. Filtrazione naturale di un processo stocastico, processi adattati a una filtrazione. Continuità a destra e completezza per una filtrazione (definizione di *F*t+), ampliamento standard. Processi di Lévy rispetto a una filtrazion. Esempi: processo di Poisson, processo di Poisson composto. Indipendenza da *F*0 di un processo di Lévy rispetto a una filtrazione (*F*t). Legge 0-1 di Blumenthal. Tempi d’arresto proprietà di Markov forte.

L’integrale di Ito: Modificazione e indistinguibilità per processi stocastici. Continuità e misurabilità per processi stocastici. Tempi d’arresto. La sigma algebra degli eventi antecedenti a un tempo d’arresto. Martingale a tempo continuo, esempi, modificazioni continue da destra (solo enunciato), teorema d'arresto e disuguaglianza massimale. Processi progressivamente misurabili. I processi semplici, L'integrale di Ito per i processi semplici. L’estensione a M^2 e l’estensione a M^2. Proprietà: località, esistenza della versione a traiettorie continue, proprietà di Martingala. Variazione quadratica. Integrale di Ito di processi a traiettorie continue e somme di Riemann. L'integrale di Wiener. Martingale locali.

La formula di Ito. La formula di Ito per il moto browniano, con dimostrazione. Processi di Ito. Formula di Ito per processi di Ito generali. Applicazione della formula di Ito, Moto browniano geometrico e supermartingala esponenziale. La formula di Ito nel caso multidimensionale. Funzioni armoniche e problema di Dirichlet. Il Teorema di Girsanov. Esempio: il processo di Ornstein-Ühlenbeck. Il Teorema di rappresentazione delle martingale browniane.

Equazioni differenziali stocastiche. Esistenza forte e debole, unicità pathwise e in legge. : Il Teorema di Yamada-Watanabe. Esistenza forte (sketch di dimostrazione) e unicità pathwise (dimostrazione) sotto ipotesi Lipschitz. Proprietà di flusso. ll semigruppo di Kolmogorov. L'equazione alle derivate parziali di Kolmogorov. La formula di Feynamn-Kac.

Applicazione ai mercati finanziari: Sottostanti, opzioni call e put, loro valore (payoff) e significato. Prezzaggio di un'opzione mediante copertura (hedging). Modello di mercato finanziario a tempo continuo basato su un titolo non rischioso (bond) e d titoli rischiosi (stocks) guidati da d moti browniani indipendenti. Misura martingala locale equivalente. Strategie di investimento autofinanzianti e strategie ammissibili. Teorema di assenza di arbitraggio. Prezzaggio e copertura di opzioni europee. Il modello di Black&Scholes (unidimensionale, con tasso d'interesse, drift e volatilità costanti). Formula esplicita per il prezzo delle opzioni call. Un modello di mercato finanziario Markoviano con drift e volatilità dipendenti dal tempo e del sottostante. Formula di rappresentazione per il prezzo delle opzioni Europee e per la strategia di copertura.

Prerequisiti

Sono necessarie le nozioni del calcolo delle probabilità, della teoria dei processi stocastici a tempo discreto. È utile conoscere definizioni e prime proprietà degli spazi L^p e degli spazi di Hilbert.

Modalità didattica

Lezioni frontali in aula in cui si illustrano definizioni, risultati dimostrazioni tecniche ed esempi rilevanti. Alcune tra le lezioni saranno dedicate all'analisi dei modelli finanziari connessi con la teoria matematica.

Materiale didattico

Dispense dei docenti (disponibili sulla piattaforma di e-learning)

Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus, Jean-François Le Gall, Springer series Graduate Texts in Mathematics (Volume 274, 2016)

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Primo semestre.

Modalità di verifica del profitto e valutazione

Esame orale. Voto in trentesimi.

Nella prova orale viene valutata la capacità dello studente di riesaminare criticamente le definizioni, gli enunciati e le dimostrazioni presentati durante il corso. Verrà anche valutata la capacità di esporre un argomento tra quelli illustrati durante il corso comunicato allo studente 15 minuti prima dell'inizio della prova orale.

Orario di ricevimento

Per appuntamento con il docente.