

## SYLLABUS DEL CORSO

### Approssimazione di Equazioni Differenziali Ordinarie

2122-1-F4001Q105

---

#### Obiettivi

Gli **obiettivi principali** del corso sono:

- Fornire **conoscenze** dei metodi numerici per la **integrazione dei sistemi di Equazioni differenziali ordinarie (e/o sistemi dinamici)**
- Capacità di **costruire** (disegnare) **ed analizzare** i diversi metodi numerici per la approssimazione dei sistemi dinamici
- Fornire **conoscenze** di alcune tecniche **per l'assimilazione di dati** (per i sistemi dinamici)
- Capacità di scegliere il metodo numerico più adeguato per problemi concreti
- Capacità di **implementare** in modo **efficiente** i diversi metodi numerici
- Capacità di **interpretare e analizzare i risultati numerici**

#### Contenuti sintetici

Il corso si propone di presentare uno studio teorico (e pratico) dei diversi metodi per approssimare equazioni differenziali ordinarie e sistemi dinamici. Gli argomenti trattati comprendono: buona posizione dei problemi di valore iniziale, analisi del metodo di Eulero, metodi di Runge-Kutta, metodi per problemi stiff e integratori geometrici. Nella ultima parte del corso verranno introdotte delle tecniche basilari di assimilazioni di dati; problemi di filtering e di smoothing; Markov Chain Monte Carlo e Metropoli-Hastings (smoothing); Kalman Filter; Ensemble Kalman Filter.

Gli argomenti verranno coperti dal punto di vista matematico, studiando come costruire e analizzare i metodi numerici per ODEs, esplorando le sue proprietà e validando gli algoritmi in problemi concreti.

## Programma esteso

0- Introduzione al corso:

Breve introduzione al corso. Richiami della teoria delle equazione (e dei sistemi di equazioni) differenziali ordinari (ODEs). Condizioni di esistenza e unicità. Buona posizione. Richiami della teoria di integrazione numerica (regole di quadratura).

1- Metodi ad un passo :

Metodo di Eulero. Teoria di Convergenza. Metodi Runge-Kutta (RK). Teoria di convergenza. Cenni sulle condizioni di ordine. Extrapolazione di Richardson. Metodi di RK embedded.

2-Metodi di Collocazione (I)

Richiamo delle Regole di Quadratura di Gauss. Metodo di Collocazione: Costruzione e Teoria di Convergenza. Analisi di convergenza per i metodi di RK impliciti.

3.- Stabilità Lineare e Integratori numerici per problemi Stiff:

Stabilità lineare. Stabilità dei Metodi RK. Problemi Stiff. Metodo BDF (Backward Differential Formula).

4-Metodi di Collocazione (II)

Implementazione di metodi di RK impliciti. Metodi di Runge-Kutta partizionati e Metodi di tipo Splitting. Definizione di Aggiunto di un metodo.

5.- Introduzione agli Integratori Geometrici:

Sistemi Hamiltoniani. Integratori Geometrici: studio qualitativo delle soluzioni. Conservazione numerica degli invarianti. Integratori simmetrici e Reversibilità. Integratori simplettici.

6- Data Assimilation:

Richiami di concetti di probabilità di base. Monte Carlo e Importance Sampling. Markov Chain Montecarlo. Algoritmo di Metropolis-Hastings. Problema di Filtering e Smoothing. Kalman Filter e generalizzazioni.

## Prerequisiti

Si assumono buone conoscenze di Analisi e di Algebra Lineare.

Buone conoscenze del Analisi Numerico di Base. Buona conoscenze di MATLAB

*Auspicabile:* buone conoscenze di base di analisi di ODEs , buone conoscenze di base di probabilita

## **Modalità didattica**

Lezioni frontali e nel laboratorio.

MATLAB verra usato per gli esempi, esercizi, e progetti.

Si offrira la possibilita (opzionale!) di usare "flipped classroom" (o inverse-blended teaching) per alcuni argomenti del corso, per gli studenti che vogliono aderire.

## **Materiale didattico**

Verrano distribuite slides del corso e alcune note/dispense per diversi argomenti (tutto in inglese!).

Bibliografia ( diversi capitoli selezionati di ogni libro; tutti sono disponibili come e-book in universita):

-E. Hairer and S. P. Norsett and G. Wanner, "Solving Ordinary Differential Equations I ", Springer, Berlin, 1993.

-E. Hairer and G. Wanner, "Solving Ordinary Differential Equations II ", Springer, Berlin, 1996.

-E. Hairer, C. Lubich and G. Wanner, "Geometric Numerical Integration", second edition, Springer, Berlin, 2006.

-B. Leimkuhler and S. Reich, "Simulating Hamiltonian Dynamics", Cambridge University Press, 2005.

-K. J. H. Law, A. M. Stuart and K. C. Zygalakis, *Data Assimilation: A Mathematical Introduction*. Springer, (2015)

MATLAB verra' usato per gli esempi, esercizi, e progetti nel laboratorio.

## **Periodo di erogazione dell'insegnamento**

Primo semestre

## **Modalità di verifica del profitto e valutazione**

L'esame consiste di due parti:

--lo sviluppo di un elaborato che riassume un piccolo progetto a scelta e

--una piccola prova finale (orale o scritta) individuale.

Ogni parte verrà valutata indipendentemente e concorrerà in egual misura alla determinazione del voto complessivo finale (sempre che entrambi voti siano maggiore o uguale a 18). Per sostenere la prova finale individuale è necessario ottenere un punteggio maggiore o uguale a 18 sull'progetto. Il voto finale, espresso in trentesimi con eventuale lode, è dato dalla media delle due prove (sempre che entrambi voti siano maggiore o uguale a 18).

Gli studenti che parteciperanno nella "didattica invertita" (flipped classroom) avranno anche il voto extra della loro esposizione.

Nel progetto si valuta la conoscenza degli algoritmi sviluppati durante il corso richiedendo la scrittura di alcuni programmi in MATLAB per la risoluzione di sistemi di ODEs. Viene valutato in termini di completezza, rigore, accuratezza, nonché chiarezza espositiva e capacità di analisi.

Il colloquio orale individuale è teso ad approfondire il livello delle conoscenze acquisite; l'autonomia di analisi e giudizio; le capacità espositive dello studente. In particolare nella suddetta prova orale/scritta si richiede la capacità di esporre gli enunciati e le dimostrazioni dei teoremi, le definizioni, gli esempi/controesempi e le tecniche di calcolo introdotte.

Il progetto potrà essere scelto da un elenco, che verrà messo a disposizione verso la fine del corso e ha validità fino al primo appello della successiva edizione del corso. È permesso svolgere il progetto in collaborazione con al più due altre persone (cioè, gruppi di un massimo di tre persone). Va consegnato in formato pdf e descrive i risultati ottenuti in al più 10-15 pagine; si raccomanda di scriverlo autonomamente. Deve essere consegnato, insieme ai nominativi del gruppo, tre-quattro giorni lavorativi prima della data concordata per la prova finale. Parte dell'esame verterà sul contenuto dell'elaborato, che permetterà valutare la applicazione delle conoscenze acquisite.

## **Orario di ricevimento**

Il ricevimento è per appuntamento via email.

---