UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

SYLLABUS DEL CORSO

Analisi Geometrica

2122-1-F4001Q113

Obiettivi

Fornire un'introduzione alla teoria dell'analisi su spazi metrici, mettendone in luce gli aspetti geometrici e le basi del calcolo differenziale.

I risultati di apprendimento attesi comprendono:

- la conoscenza e la comprensione delle definizioni e degli enunciati fondamentali, nonché di alcune strategie di dimostrazione; la conoscenza e la comprensione di alcune classi di esempi fondamentali a cui la teoria si applica.
- la capacità di riconoscere e analizzare gli spazi metrici (di lunghezza, intrinseci e di misura) che possono nascere da diversi ambiti della matematica; la capacità di determinare alcune proprietà geometriche e analitiche fondamentali di uno spazio metrico e di saper introdurre un calcolo differenziale al primo ordine su questi spazi; la capacità di esporre in modo chiaro i contenuti del corso, di manipolare alcuni esempi e di individuare connessioni tra i diversi argomenti trattati nel corso.

Contenuti sintetici

Nozioni basilari e aspetti geometrici (curvatura) degli spazi metrici intrinseci.

Elementi di calcolo differenziale al primo ordine su spazi metrici di misura.

Programma esteso

Parte I. Spazi metrici (intrinseci) e curvatura.

- Spazi metrici: definizione, esempi, topologia; misura e dimensione di Hausdorff.
- Spazi di lunghezza, metriche intrinseche, geodetiche, lunghezza e velocità; costruzioni e esempi.
- Spazi di curvatura limitata: alcune definizioni equivalenti di curvatura limitata (dall'alto o dal basso) per uno spazio metrico; angoli e funzione distanza; controllo locale e globale della curvatura.
- Convergenza di spazi metrici: convergenza uniforme e Gromov-Hausdorff.
- Proprietà degli spazi metrici a curvatura positiva: crescita dei volumi, dimensione di Hausdorff; esempi (coni, insiemi convessi,...); cenni a risultati di compattezza.

Parte II. Calcolo differenziale su spazi metrici di misura

- Spazi metrici di misura; proprietà del raddoppio; lemmi di ricoprimento: teorema di Vitali, teorema di Lebesgue.
- Funzione massimale di Hardy-Littlewood: risultati di limitatezza.
- Richiami su spazi di Sobolev in R^n; alcune definizioni equivalenti; immersioni di Sobolev; disuguaglianze di Poincaré.
- Funzioni lipschitziane: teoremi di estensione e di densità; gradiente superiore; moduli di una famiglia di curve; capacità.
- Spazi di Sobolev su spazi metrici: definizione via la funzione massimale; definizione via il gradiente superiore. Disuguaglianze di Poincaré su spazi metrici.
- Cenni a equazioni differenziali su spazi metrici: problemi di minimizzazione dell'energia.

Prerequisiti

Calcolo in più variabili, fondamenti di teoria della misura, di spazi di Hilbert e di spazi Lp.

Una conoscenza di base degli spazi di Sobolev in R^n può aiutare nella fruizione del corso, ma non è strettamente necessaria.

Modalità didattica

Le lezioni saranno frontali, con uso di lavagna.

Materiale didattico

I principali testi di riferimento sono:

- D. Burago, Y. Burago, and S. Ivanov. *A course in metric geometry*, volume 33 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001 (per la prima parte del corso)
- J. Heinonen. *Lectures on analysis on metric spaces.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001 (per la seconda parte del corso)

Testi integrativi e ulteriore materiale didattico potranno essere forniti durante lo svolgimento del corso.

Periodo di erogazione dell'insegnamento

II semestre.

Modalità di verifica del profitto e valutazione

L'esame consiste in una prova orale con voto in trentesimi.

Una parte della prova può essere costituita dall'esposizione di un tema integrativo a quelli trattati nel corso, concordato preventivamente col docente. La restante parte è volta alla verifica della conoscenza e della comprensione di argomenti (teoria ed esempi) svolti nel corso

Orario di ricevimento

Su appuntamento.