UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

COURSE SYLLABUS

Stochastic Methods and Models

2122-1-F4001Q106

Obiettivi

L'insegnamento si propone di fornire una selezione di strumenti, concetti e modelli avanzati del calcolo delle probabilità e dei processi stocastici, dal punto di vista sia teorico che applicativo.

Al termine del corso lo studente avrà acquisito le seguenti:

- *conoscenze*: una selezione di risultati avanzati del calcolo della probabilità (grandi deviazioni), dei processi stocastici (catene di Markov a tempo continuo) e dei modelli stocastici (grafi aleatori);
- *competenze*: comprensione operativa del linguaggio probabilistico e di tecniche dimostrative avanzate (ad es. coupling);
- *abilità*: capacità di applicare le nozioni teoriche per la risoluzione di esercizi e l'analisi di problemi e modelli.

Contenuti sintetici

L'insegnamento si apre con lo studio del **Processo di Posson**, l'esempio più importante di processo stocastico a tempo continuo con stati discreti. Questo è il punto di partenza per lo studio generale delle **catene di Markov a tempo continuo**. Vengono poi presentati alcuni risultati della teoria delle **grandi deviazioni**, che fornisce un quadro che permette di studiare eventi rari su scala esponenziale. La terza parte del corso è dedicata ad approfondimenti sulle proprietà delle **passeggiate aleatorie**, un argomento fondamentale e ricco di spunti. L'ultima parte del corso si occupa della **teoria dei grafi aleatori**, un argomento di ricerca che sta ricevendo grande attenzione.

Programma esteso

1. Processo di Poisson

- Introduzione ai processi di punto
- Il processo di Poisson
- Proprietà asintotiche

2. Catene di Markov a tempo continuo

- Semigruppi e generatori su spazi numerabili

- Catene di Markov a tempo continuo
- La proprietà di Markov forte
- Convergenza all'equilibrio

3. Grandi deviazioni

- Il teorema di Cramer
- Entropia relativa e teorema di Sanov
- Il principio di grandi deviazioni
- Applicazione: il modello di Curie-Weiss

4. Passeggiate aleatorie

a) Passeggiate aleatorie

- Passeggiata aleatoria semplici sugli interi
- Teorema di Polya per passeggiate aleatorie semplici

- Teorema di Kesten-Spitzer-Whitman

b) Passeggiate aleatorie in ambiente aleatorio

- Problema di Dirichlet per passeggiate aleatorie su grafi
- Teorema di Solomon per passeggiate aleatorie in ambiente aleatorio sugli interi

*c) Catene di Markov numerabili

- Criteri di Lyapunov per ricorrenza e transienza
- Una dimostrazione alternativa del Teorema di Polya
- Processi di diramazione con migrazione
- Passeggiate aleatorie sollecitate

5. Grafi aleatori

- Introduzione ai grafi aleatori
- Il modello di Erdos-Renyi
- Connettività e componente gigante nel modello di Erdos-Renyi

**potremmo non riuscire a coprire una parte del (o tutto il) materiale di questo argomento, dipende dalla velocità delle lezioni*

Prerequisiti

Le conoscenze, competenze e abilità impartite negli insegnamenti di calcolo delle probabilità e processi stocastici (variabili aleatorie, martingale, legge condizionale) oltre che quelle impartite nei corsi di analisi matematica.

Modalità didattica

Lezioni frontali articolate in

- lezioni teoriche, in cui si fornisce la conoscenza di definizioni, risultati, dimostrazioni ed esempi rilevanti;
- lezioni pratiche, in cui si forniscono competenze e abilità necessaire per utilizzare le nozioni teoriche per l'analisi di modelli e la risoluzione di problemi.

Materiale didattico

Testi di riferimento:

- E. Pardoux, *Markov processes and applications*, Wiley Series in Probability and Statistics (2008)
- F. den Hollander, *Large Deviations*, Americal Mathematical Society (2008)
- R. van der Hofstad, *Random Graphs and Complex Networks*, Volume I, Cambridge University Press (2017)
- S. Asmussen, *Applied Probability and Queues*, Springer (2003)
- Lecture notes of the course "Topics in Random Walks" by Tal Orenshtein in 2019 at TU Berlin
- Q. Berger, F. Caravenna, P. Dai Pra, Probabilità: un primo corso attraverso esempi, modelli e applicazioni (II edizione), Springer (2021)

Altro materiale:

- Appunti delle lezioni
- Altre referenze / dispense fornite dai docenti

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Secondo semestre

Modalità di verifica del profitto e valutazione

L'esame si articola in due parti: una **consegna di esercizi** svolti in autonomia, che contribuisce per un sesto al voto finale, e una **prova orale**, che contribuisce per cinque sesti al voto finale, espresso in trentesimi.

La **consegna di esercizi** consiste nella risoluzione di alcuni esercizi proposti durante il corso, che lo studente dovrà svolgere in autonomia e consegnare con un anticipo di almeno una settimana rispetto alla prova orale, e ha lo scopo di valutare la continuità dell'apprendimento e le abilità pratiche.

La **prova orale** consiste in un colloquio della durata indicativa di 30-60 minuti in cui vengono valutate la conoscenza delle definizioni, enunciati ed esempi presentati durante il corso e la competenza e abilità nell'esposizione di una selezione di argomenti con i dettagli delle dimostrazioni.

Ci saranno 5 appelli d'esame (due tra giugno e luglio, uno a settembre, due a febbraio).

Orario di ricevimento

Su appuntamento