UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

COURSE SYLLABUS

Differential Geometry

2223-1-F4001Q071

Obiettivi

Lo scopo dell'insegnamento è introdurre lo studente alla teoria delle varietà riemanniane, ossia le varietà differenziali dotate di una metrica riemanniana, che consiste nell'assegnazione di un prodotto scalare euclideo a ogni spazio tangente, che vari in modo liscio con il punto base. Il corso si propone di familiarizzare lo studente con i concetti e le tecniche di base della geometria differenziale, partendo dal concetto fondante di connessione di Levi-Civita come generalizzazione dal contesto 'piatto' a quello 'curvo' della derivata ordinaria di un campo vettoriale. A partire dalla connessione di Levi Civita, verranno infatti introdotti gli invarianti di curvatura e le geodetiche. Un aspetto che ci si propone di illustrare è l'interazione tra le caratteristiche locali della struttura riemanniana, compendiate dalla curvatura, e la 'forma globale' della varietà stessa, ossia le sue caratteristiche topologiche.

I risultati di apprendimento attesi includono:

- Conoscenze: la conoscenza e la comprensione delle definizioni e degli enunciati fondamentali, nonché delle strategie di dimostrazione basilari utilizzate in geometria differenziale; la conoscenza e la comprensione di alcuni esempi chiave in cui si esplica la teoria;
- Capacità: la capacità di applicare le conoscenze astratte acquisite alla risoluzione di esercizi di calcolo e problemi teorici, richiamando in modo corretto e conseguente i risultati utilizzati; la capacità di applicare il bagaglio concettuale appreso alla costruzione e discussione di esempi concreti e alla risoluzione di esercizi; la capacità di esporre, comunicare e argomentare in modo chiaro, pertinente e preciso i contenuti teorici del corso.

Contenuti sintetici

Varietà differenziali, metriche riemanniane, connessioni, invarianti di curvatura, ipersuperfici e gruppi di Lie, sommersioni riemanniane, sottovarietà riemanniane, trasporto parallelo e geodetiche. Alcuni notevoli risultati globali (quali, tempo permettendo, i Teoremi di Gauss, Hopf-Rinow, Hadamard, Bonnet-Myers).

Programma esteso

Brevi cenni preliminari sulle varietà differenziali; metriche riemanniane; Teorema fondamentale e della Geometria Riemanniana connessione di Levi Civita; tensore di curvatura; curvatura sezionale, di Ricci e scalare; classi di esempi: gruppi di Lie, ipersuperfici, metriche a simmetria rotazionale; operatore forma; equazioni di Gauss e Codazzi-Mainardi; Teorema Egregium; Teorema di Hadamard; sommersioni riemanniane, formula di ‘O Neill e Gray, mappa di Hopf; trasporto parallelo lungo una curva; geodetiche, esistenza e unicità; esempi; mappa esponenziale e sue proprietà; coordinate normali; isometrie. Campi vettoriali di Jacobi. Alcuni Teoremi globali (Teoremi di Gauss, Hopf-Rinow, Hadamard, Bonnet-Myers).

Prerequisiti

Le competenze di geometria, analisi e algebra offerte dal percorso comune della laurea triennale in matematica sono, in linea di principio, adeguate per affrontare il corso con profitto; realisticamente, tuttavia, chi non ha acquisito le conoscenze di base sulle varietà differenziali contenute per esempio nel corso di Geometria III del nostro corso di laurea triennale dovrà fare in parallelo del lavoro preliminare in autonomia, perché la discussione dei prerequisiti sarà limitata a un breve richiamo.

Modalità didattica

Lezioni frontali: 8 cfu.

Materiale didattico

Testi di riferimento:

L. Tu, Differential Geometry, Springer

M. Do Carmo, Riemannian Geometry, Birkhauser

Loring Tu, Differential Geometry, Connections, Curvature, and Characteristic Classes, GTM Springer 2017

Letture consigliate:

M. Do Carmo, Differential forms and applications, Springer Verlag 1996;

P. Petersen, Riemannian Geometry, Springer Verlag 2006

Periodo di erogazione dell'insegnamento

II semestre

Modalità di verifica del profitto e valutazione

Durante lo svolgimento del corso, verranno offerte due prove in itinere, attinenti alla prima e alla seconda metà del corso, rispettivamente, ciascuna delle quali consisterà in una combinazione flessibile ma bilanciata di esercizi computazionali e domande teoriche, sulla falsariga di quanto viene proposto nelle prove degli appelli regolari (vedasi descrizione qui sotto). Le domande teoriche verteranno su definizioni, enunciati di teoremi, dimostrazioni, costruzione di esempi e controesempi e semplici problemi teorici. Per superare l'esame mediante le prove in itinere, lo studente deve ottenere la sufficienza (18/30) in entrambe. Le due prove in itinere contribuiranno in egual misura alla formazione del voto finale.

Gli studenti che non superano l'esame mediante le prove in itinere potranno sostenere gli appelli regolari. In occasione di ogni sessione d'esame, verranno offerte due prove scritte, attinenti, come le prove in itinere, alla prima metà e alla seconda metà del corso, rispettivamente e strutturate nello stesso modo. Ogni prova scritta consisterà quindi di una combinazione flessibile ma bilanciata di esercizi computazionali e di domande teoriche.

Attraverso gli esercizi computazionali, verrà valutata la capacità dello studente di maneggiare con padronanza e precisione il formalismo introdotto e di utilizzarlo per eseguire semplici calcoli, nonché di mettere all'opera le conoscenze teoriche trasmesse, richiamandole in modo preciso e pertinente.

Attraverso le domande teoriche verranno valutate la conoscenza e la comprensione dell'impianto concettuale del corso, nonché la capacità di organizzare in modo lucido, efficace e ben strutturato un'esposizione coerente e puntuale.

Per superare l'esame negli appelli regolari, lo studente ottenere la sufficienza di 18/30 in ciascuna delle due prove scritte. Non è necessario che le prove vengano superate nel medesimo appello d'esame. E' altresì consentito superare una delle due prove in corrispondenza di una prova in itinere e un'altra in occasione di un appello regolare.

A ogni esercizio/quesito (o problema) teorico di ciascuna prova verrà attribuito un punteggio parziale massimo, in ragione della sua difficoltà e lunghezza; nella valutazione dello studente verrà assegnato un punteggio in corrispondenza di ogni esercizio/quesito (o problema) teorico non superiore a quello massimo previsto, in ragione dell'esattezza, della completezza, del rigore, della chiarezza e dell'organicità dello svolgimento.

L'esatta suddivisione del corso nelle due parti verrà comunicata durante lo stesso e con ampio anticipo rispetto alle prove.

Orario di ricevimento

Su appuntamento

Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÁ