UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

COURSE SYLLABUS

Functional Analysis

2223-1-F4001Q075

Obiettivi

Coerentemente con gli obiettivi formativi del Corso di Studio, l'insegnamento si propone di fornire allo studente le conoscenze riguardanti i fondamenti dell'Analisi Funzionale. Verranno altresì fornite le competenze necessarie a comprendere e analizzare le principali tecniche e i metodi dimostrativi connessi alla teoria, e le abilità utili ad applicarle per affrontare problemi in diversi ambiti della Matematica. Particolare enfasi verrà posta sugli aspetti topologici.

Contenuti sintetici

Spazi localmente compatti di Hausdorff. Spazi di funzioni continue. Spazi L?. Compattezza in C? e in L?. Topologia deboli e debole* (debole stella). Compattezza nelle topologie deboli. Teoremi di rappresentazione di Riesz.

Programma esteso

Spazi metrici, spazi vettoriali normati, compattezza della palla chiusa e dimensione.

Spazi di funzioni continue. Lemma di Urysohn e cut-offs. Il Teorema di Stone-Weierstrass: densità e separabilità. Compattezza negli spazi di funzioni continue: il Teorema di Ascoli-Arzelà.

Spazi L? e loro proprietà basilari. Il Teorema di Lusin: densità e separabilità. Compattezza negli spazi L? : il Teorema di Kolmogorov-Riesz. L'embedding canonico di Frechet-Kuratowski per spazi metrici separabili e non separabili.

Funzionali lineari e topologia debole su uno spazio normato. Funzionali subadditivi positivamente omogenei. Forma generale del Teorema di Hahn-Banach. Convessità e separazione mediante iperpiani. Il Teorema di Mazur: chiusura debole e forte di insiemi convessi.

Topologia debole* (debole stella). Biduale ed embedding di James. Il Teorema di Banach-Alaoglu: compattezza debole* della palla chiusa nel duale.

Spazi riflessivi. Riflessività negli spazi L?. Uniforme convessità e riflessività. Convergenza forte e debole in spazi uniformemente convessi. I teoremi di Kakutani e di Eberlein-Smulyan: compattezza debole della palla chiusa e riflessività. Compattezza per successioni nella topologia debole*.

Spazi vettoriali topologici localmente convessi: definizione e proprietà elementari. Involucro convesso e punti estremali: il teorema di Krein-Milman.

Misure con segno. Il teorema di Radon-Nikodym. Dualità negli spazi di funzioni continue: il Teorema di Rappresentazione di Riesz.
.

Prerequisiti

Elementi di teoria dell'integrazione astratta, elementi di teoria degli spazi L?, elementi di topologia generale. Conoscenze di base sugli spazi di Banach e sugli spazi di Hilbert.

Modalità didattica

Lezioni frontali dedicate ad introdurre i principali concetti teorici, a presentare nel dettaglio le dimostrazioni dei teoremi, e ad analizzare esempi espliciti. Durante il corso saranno assegnati anche degli esercizi da svolgere in autonomia a casa con lo scopo sia di applicare in casi concreti le nozioni teoriche apprese che di approfondire alcuni aspetti della teoria.

Materiale didattico

Referenze bibliografiche

- H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011
- G.B. Folland. *Real analysis*. *Modern techniques and their applications*. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
- W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987
- T. Bühler and D. A. Salamon. *Functional analysis*. Graduate Studies in Mathematics, volume 191. AMS, Providence, RI, 2018

Ulteriore materiale

Sulla pagina E-Learning del corso verranno distribuiti i seguenti documenti:

- Alcune note del corso.

- Alcuni articoli di ricerca o di rassegna su parti tematiche del corso.
- Esercizi e problemi.

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Primo semestre.

Modalità di verifica del profitto e valutazione

L'esame è unicamente orale. Esso consiste di un colloquio con valutazione, e si articola in una serie di quesiti atti a verificare la conoscenza e la padronanza da parte dello studente dei teoremi con relative dimostrazioni svolte nel corso.

Nella prova orale viene valutato se lo studente ha acquisito le competenze necessarie a presentare una selezione delle dimostrazioni svolte in aula, e, soprattutto, la conoscenza critica e operativa delle definizioni e dei risultati del corso, mediante l'illustrazione di esempi e controesempi.

Orario di ricevimento

Su appuntamento.

Sustainable Development Goals