



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

## COURSE SYLLABUS

### Mathematical Methods for Economic Analysis - Optimal Control

2223-1-F4001Q094

---

#### Obiettivi

Coerentemente con gli obiettivi formativi del Corso di Studio, l'insegnamento si propone di fornire allo studente le *conoscenze* riguardanti le definizioni e gli enunciati fondamentali del controllo ottimo sia con la tecnica variazionale che con la programmazione dinamica. Questi strumenti poi verranno applicati alla teoria dei giochi differenziali. Verranno altresì fornite le *competenze* necessarie a comprendere e analizzare le principali tecniche e metodi dimostrativi connessi alla teoria, e le *abilità* utili ad applicarle per risolvere esercizi e affrontare modelli economici e non.

#### Contenuti sintetici

Problemi di controllo ottimo con il metodo variazionale: teoria e modelli economici. Problemi di controllo ottimo con la programmazione dinamica: teoria e modelli economici. Introduzione ai giochi differenziali.

#### Programma esteso

##### 1. INTRODUZIONE AL CONTROLLO OTTIMO

- a. **Alcuni problemi introduttivi** In barca con Pontryagin, un modello di consumo ottimo, "*the lady in the lake*".
- b. **Formulazione di un problema di controllo ottimo** Definizioni di controlli, dinamica, traiettorie, insieme di controllo, target set.  
Funzioni assolutamente continue. Soluzione di una equazione differenziale ordinaria con funzioni misurabili: definizione e teorema di esistenza e unicità. Controlli ammissibili. Importanza del caso della dinamica lineare. Insieme dei punti raggiungibili.

## 2. II CONTROLLO OTTIMO CON METODO VARIAZIONALE

**a. Il problema più semplice di controllo ottimo** Il teorema di Pontryagin (DIM nel caso di insieme di controllo  $U=R$ , DIM anche del lemma tecnico): definizione di Hamiltoniana e conseguenze del principio del Massimo. Controllo estremale, moltiplicatore associato. Controllo normale e abnormale: un esempio di controllo ottimo abnormale. Proprietà dell'Hamiltoniana lungo il cammino ottimo (DIM).

Problemi autonomi: proprietà dell'Hamiltoniana lungo il cammino ottimo.

Condizioni sufficienti di ottimalità: la condizione di Mangasarian (DIM). Funzioni concave, sopragradiente, sopragradiente di funzioni differenziabili, cenni al Teorema di Rockafellar: la condizione sufficiente di Arrow (DIM).

Condizioni di trasversalità per i problemi con punti iniziali/finali fissati. Sui problemi di minimo.

*A two sector model with investment and consumption goods.*

**b. Il problema più semplice di calcolo delle variazioni** Il teorema di Eulero (DIM come caso particolare del teorema di Pontryagin). Condizioni di trasversalità per i problemi con punti iniziali/finali fissati. Condizioni sufficienti per il problema più semplice usando concavità/concavità.

*Curva di lunghezza minima.*

**c. Controlli singolari e bang-bang** Definizioni di controlli bang-bang, istanti di commutazione e controlli singolari.

*La costruzione di una strada di montagna a costo minimo.*

**d. Problema più generali di controllo ottimo** Problemi di Mayer, di Bolza e Lagrange: loro equivalenza (DIM).

Problemi a tempo finale fisso: condizione necessaria e condizione sufficiente per il problema di Bolza, problemi autonomi. Problemi a tempo finale libero: nozione di tempo di uscita, condizione necessaria per il problema di Bolza, problemi autonomi.

**Problemi di time optimal:** condizione necessaria. *In barca con Pontryagin.* Problemi di time optimal singolari: *the Dubin car.*

**Problemi ad orizzonte infinito:** controesempio di Halkin; condizione sufficiente (DIM). Hamiltoniana corrente e moltiplicatore corrente e loro condizioni necessarie (DIM) e sufficienti. *Modelli di crescita economica: preferenze, funzioni di utilità: un modello di consumo ottimo con utilità logaritmica.*

**e. Problemi di esistenza e controllabilità** Esempi di classe di controlli vuota o di classe di controlli non vuota e senza controllo ottimo (controesempio di Bolza). Disuguaglianza di Gronwall (DIM). Teorema di esistenza del controllo ottimo per i problemi di Bolza: il caso con insieme di controllo chiuso e il caso con insieme controllo compatto.

## 3. CONTROLLO OTTIMO CON IL METODO DELLA PROGRAMMAZIONE DINAMICA

**a. La funzione valore e le sue proprietà per il problema più semplice di controllo ottimo.** Definizione della funzione valore. Il principio di ottimalità di Bellman (DIM).

Le proprietà della funzione valore: la condizione (necessaria) finale sulla funzione valore (DIM), l'equazione di Bellmann-Hamilton-Jacobi (BHJ) per funzioni valori differenziabili (DIM). L'Hamiltoniana della Programmazione Dinamica. Condizioni sufficienti di ottimalità (DIM). L'equazione di BHJ lungo la traiettoria ottima. Sui problemi di minimo.

*Soluzione del problema di strategia aziendale di produzione/vendita.* Problemi Affini-Quadratici e Lineari-Quadratici-omogenei: loro funzione valore. Equazioni differenziali di Ricatti.

La funzione valore del problema a tempo finale fisso e valore finale libero (sotto opportune ipotesi), è Lipschitz (DIM per problemi autonomi). Cenni al teorema di Rademacher: la funzione valore ammette derivate q.o.

Definizione di soluzione viscosa per l'equazione di BHJ; la funzione valore come unica soluzione viscosa per l'equazione di BHJ; un esempio di problema di controllo ottimo la cui funzione valore è soluzione viscosa per l'equazione di BHJ.

**b. Problemi più generali di controllo ottimo.** Condizioni necessarie e sufficienti per problemi di controllo ottimo più generali.

*Modello di produzione e gestione del magazzino.* Problemi autonomi, ad orizzonte illimitato: la sua funzione valore corrente e la relativa equazione di BHJ (DIM). *Un modello di consumo ottimo con utilità HARA.* Cenni al modello stocastico di Merton.

**c. Legami tra i metodi variazionali e la Programmazione Dinamica.**

Interpretazione del moltiplicatore come prezzo ombra (DIM).

## 4. GIOCHI DIFFERENZIALI

**a. Nozioni introduttive** Formulazione di un gioco differenziale a 2 giocatori. Giochi simmetrici, giochi completamente cooperativi, giochi a somma zero. Concetti di soluzioni: equilibrio di Nash, equilibrio di Stackelberg.

Tipi di strategie: a ciclo aperto e feedback.

**b. Soluzioni di equilibrio di Nash** \*Strategie open loop. Uso dell'approccio variazionale: condizioni necessarie e sufficienti per avere un equilibrio di Nash open-loop. *Il modello lavoratori-capitalisti di Lancaster*. \*\*Strategie feedback. Perché la tecnica variazione non è particolarmente utile (DIM). Definizione di funzione valore su un equilibrio di Nash feedback. Condizioni necessarie e sufficienti con l'uso della programmazione dinamica per un equilibrio di Nash feedback. Le funzioni valore per problemi giochi differenziali Affini-Quadratici a due giocatori. La funzioni valore corrente per giochi a orizzonte infinito e scontati. *Un problema di produzione per due aziende in competizione*.

**c. Soluzioni di equilibrio di Stackelberg** Giocatore leader e giocatore gregario, insieme di miglior risposta. Ricerca di soluzioni open-loop con l'approccio variazionale. *Padre e figlio al lago*.

**d. Giochi a somma zero** Equilibrio di Nash come punto di sella. Insieme dei controlli e insieme delle strategia non anticipative: esempio della strategia non anticipativa costante.

Definizione di funzione valore inferiore  $V^-$ , funzione valore superiore  $V^+$  e loro relazione; un esempio di gioco con  $V^- > V^+$ . Definizione di funzione valore  $V$ .

Hamiltoniana inferiore della Programmazione Dinamica  $H^-PD$  (superiore  $H^+PD$ ):  $H^-PD \leq H^+PD$  (DIM); un esempio di gioco con  $H^-PD < H^+PD$ . *Condizione di Isaacs (o di minimax) e definizione di Hamiltoniana della Programmazione Dinamica HPD*.

*Risultati con funzioni valore regolari. Equazione di Isaacs inferiore e superiore:  $V^-$  ( $V^+$ ) è soluzione dell'equazione di Isaacs superiore (inferiore). Una dimostrazione geometrica che  $V$  soddisfa l'equazione di Isaacs (DIM).*

*Equazioni di Isaacs per  $V$  e condizioni sufficienti con la PD per un equilibrio di Nash con strategia feedback. Condizioni necessarie e sufficienti con approccio variazionale con strategia open-loop*

*Risultati per funzioni valore in generale.  $V^-$  ( $V^+$ ) è Lipschitz (sotto opportune ipotesi).  $V^-$  ( $V^+$ ) è l'unica soluzione viscosa dell'equazione di Isaacs inferiore (superiore). La condizione di Isaacs implica  $V^- = V^+ = V$ . War of attrition and attack\**

**e. Giochi di cattura ed evasione** Formulazione di un gioco di cattura-evasione, target set, exit time. La funzione valore e l'equazione di Isaacs per problemi autonomi (DIM). *Lady in the lake*.

## Prerequisiti

Le conoscenze acquisite nei corsi della laurea triennale sono una base sufficiente.

## Modalità didattica

Normalmente, lezioni frontali con esercitazioni.

## Materiale didattico

[C1] A. Calogero "Notes on optimal control theory", disponibile gratuitamente in rete.

[C2] A. Calogero "A very short tour on differential games", disponibile gratuitamente in rete.

[C3] A. Calogero "Exercises of dynamic optimization", disponibile gratuitamente in rete.

**Ulteriore materiale didattico:** [BO] T. Başar, G.O. Olsder "Dynamic noncooperative game theory", SIAM Classic in Applied Mathematics, 1998

[B] A. Bressan "Noncooperative differential games. A Tutorial", Milan Journal of Mathematics, vol 79, pag 357-427, 2011.

[E] L.C. Evans "An introduction to mathematical optimal control theory", disponibile gratuitamente in rete.

[FR] W.H. Fleming, R.W. Rishel "*Deterministic and stochastic optimal control*", Springer-Verlag, 1975

[KS] M.I. Kamien, N.L. Schwartz "*Dynamic optimization*" Elsevier, second edition, 2006

[SS] A. Seierstad, K Sydsæter "*Optimal control theory with economics applications*" Elsevier Science, 1987

## Periodo di erogazione dell'insegnamento

Primo semestre

## Modalità di verifica del profitto e valutazione

L'esame consiste in una prova scritta e una prova orale facoltativa: senza orale non si registrano voti superiori ai 27/30; l'ammissione alla prova orale è possibile solo con un voto non inferiore a 27/30.

**PROVA SCRITTA** (3 ore, a cui è necessario iscriversi) consiste in una prova sui seguenti argomenti:

- definizioni, teoremi, dimostrazioni (le dimostrazioni sono indicate con DIM) come da programma dettagliato;
- modelli economici e non, come da programma dettagliato;
- esercizi di controllo ottimo con metodo variazionale e con la programmazione dinamica.

Gli esercizi dell'esame scritto verranno scelti rigorosamente dalla lista [C3] presente sulla pagina del corso (escludendo gli esercizi del punto 1.8): si consiglia di verificare periodicamente la lista.

**PROVA ORALE** (in data da concordare, ma entro un anno dalla prova scritta) è un approfondimento dell'elaborato scritto.

E' facoltà dello studente rifiutare il voto finale e ripetere la prova d'esame, per non più di 2 volte.

## Orario di ricevimento

Su appuntamento con il docente.

## Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÀ

---