



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

## SYLLABUS DEL CORSO

### Metodi e Modelli Stocastici

2223-1-F4001Q106

---

#### Obiettivi

L'insegnamento si propone di fornire una selezione di strumenti, concetti e modelli avanzati del calcolo delle probabilità e dei processi stocastici, dal punto di vista sia teorico che applicativo.

Al termine del corso lo studente avrà acquisito le seguenti:

- *conoscenze*: una selezione di risultati avanzati del calcolo della probabilità (grandi deviazioni), dei processi stocastici (catene di Markov a tempo continuo) e dei modelli stocastici (grafi aleatori);
- *competenze*: comprensione operativa del linguaggio probabilistico e di tecniche dimostrative avanzate (ad es. coupling);
- *abilità*: capacità di applicare le nozioni teoriche per la risoluzione di esercizi e l'analisi di problemi e modelli.

#### Contenuti sintetici

L'insegnamento si apre con alcuni risultati di **grandi deviazioni**, teoria che fornisce un quadro che permette di studiare eventi rari su scala esponenziale. Nella seconda parte del corso si approfondiscono le **catene di Markov a tempo discreto** e si introducono le **catene di Markov a tempo continuo**, dando particolare importanza al **Processo di Poisson**, l'esempio più importante di processo stocastico a tempo continuo con stati discreti. La terza parte del corso è dedicata ad approfondimenti sulle proprietà delle **passeggiate aleatorie**, un argomento fondamentale e ricco di spunti. L'ultima parte del corso si occupa della **teoria dei grafi aleatori**, un argomento di ricerca che sta ricevendo grande attenzione.

#### Programma esteso

## 1. Grandi deviazioni

- Il teorema di Cramér
- Entropia relativa e teorema di Sanov
- Il principio di grandi deviazioni
- Il principio di contrazione, il lemma di Varadhan, il Teorema di Gärtner-Ellis

## 2. Catene di Markov a tempo discreto e continuo

- Richiami (irriducibilità, classificazione degli stati, ...)
- Proprietà di Markov forte
- Misure invarianti e convergenza all'equilibrio
- Semigrupp e generatori su spazi numerabili

## 3. Processo di Poisson

- Legge degli incrementi
- Proprietà asintotiche
- Paradosso del tempo di attesa

## 4. Passeggiate aleatorie

### a) Passeggiate aleatorie

- Passeggiata aleatoria semplici sugli interi
- Teorema di Polya per passeggiate aleatorie semplici

### b) Passeggiate aleatorie in ambiente aleatorio

- Problema di Dirichlet per passeggiate aleatorie su grafi
- Teorema di Solomon per passeggiate aleatorie in ambiente aleatorio sugli interi

### \*c) Catene di Markov numerabili

- Criteri di Lyapunov per ricorrenza e transienza
- Una dimostrazione alternativa del Teorema di Polya
- Processi di diramazione con migrazione
- Passeggiate aleatorie sollecitate

## 5. Grafi aleatori

- Introduzione ai grafi aleatori
- Il modello di Erdos-Renyi
- Connettività e componente gigante nel modello di Erdos-Renyi

*\*potremmo non riuscire a coprire una parte del (o tutto il) materiale di questo argomento, dipende dalla velocità delle lezioni*

## Prerequisiti

Le conoscenze, competenze e abilità impartite negli insegnamenti di calcolo delle probabilità e processi stocastici (variabili aleatorie, martingale, legge condizionale) oltre che quelle impartite nei corsi di analisi matematica.

## Modalità didattica

Lezioni frontali articolate in

- lezioni teoriche, in cui si fornisce la conoscenza di definizioni, risultati, dimostrazioni ed esempi rilevanti;
- lezioni pratiche, in cui si forniscono competenze e abilità necessarie per utilizzare le nozioni teoriche per l'analisi di modelli e la risoluzione di problemi.

## Materiale didattico

*Testi di riferimento:*

- E. Pardoux, *Markov processes and applications*, Wiley Series in Probability and Statistics (2008)
- F. den Hollander, *Large Deviations*, American Mathematical Society (2008)
- R. van der Hofstad, *Random Graphs and Complex Networks*, Volume I, Cambridge University Press (2017)
- S. Asmussen, *Applied Probability and Queues*, Springer (2003)
- Lecture notes of the [course](#) "Topics in Random Walks" by Tal Orenshtein in 2019 at TU Berlin
- Q. Berger, F. Caravenna, P. Dai Pra, *Probabilità: un primo corso attraverso esempi, modelli e applicazioni* (II edizione), Springer (2021)

*Altro materiale:*

- Appunti delle lezioni
- Altre referenze / dispense fornite dai docenti

## Periodo di erogazione dell'insegnamento

Secondo semestre

## Modalità di verifica del profitto e valutazione

L'esame si articola in due parti: una **consegna di esercizi** svolti in autonomia, che contribuisce per un sesto al voto finale, e una **prova orale**, che contribuisce per cinque sestimi al voto finale, espresso in trentesimi.

La **consegna di esercizi** consiste nella risoluzione di alcuni esercizi proposti durante il corso, che lo studente dovrà svolgere in autonomia e consegnare con un anticipo di almeno una settimana rispetto alla prova orale, e ha lo scopo di valutare la continuità dell'apprendimento e le abilità pratiche.

La **prova orale** consiste in un colloquio della durata indicativa di 30-60 minuti in cui vengono valutate la conoscenza delle definizioni, enunciati ed esempi presentati durante il corso e la competenza e abilità nell'esposizione di una selezione di argomenti con i dettagli delle dimostrazioni.

Ci saranno 5 appelli d'esame (due tra giugno e luglio, uno a settembre, due a febbraio).

## **Orario di ricevimento**

Su appuntamento

## **Sustainable Development Goals**

ISTRUZIONE DI QUALITÀ

---