

## SYLLABUS DEL CORSO

### Matematica per l'Economia M

2223-1-F8204B021

---

#### Obiettivi formativi

Il corso si propone di fornire agli studenti alcuni degli strumenti teorici fondamentali per l'analisi di modelli economici descritti da sistemi dinamici (a tempo continuo) ed alcuni elementi di base della teoria della misura impiegati nell'analisi di modelli economici in presenza di incertezza.

L'acquisizione di tali competenze metterà in grado lo studente di:

- 1) saper "leggere" un modello che evolve nel tempo, la cui dinamica è descritta da sistemi di equazioni differenziali ordinarie (ODE), cioè di analizzare esistenza ed unicità di una soluzione ove siano note le condizioni iniziali, determinare esplicitamente eventuali soluzioni nel caso lineare ed in alcuni altri casi particolari, stabilire e classificare eventuali soluzioni d'equilibrio;
- 2) risolvere alcuni problemi di controllo ottimo, attraverso l'applicazione del principio del massimo di Pontryagin e di condizioni sufficienti di ottimalità;
- 3) risolvere alcuni problemi più semplici del calcolo delle variazioni;
- 4) stabilire un collegamento tra la definizione di un integrale e la sottostante teoria della misura ed in particolare conoscere l'integrale di Lebesgue insieme alle sue proprietà fondamentali.

#### Contenuti sintetici

Il corso si compone di tre parti. Le prime due sono strettamente interconnesse mentre la terza, oltre a qualche collegamento con la seconda, fornisce elementi utili in corsi come Finanza Matematica M.

Nella Parte I sono esposti gli elementi fondamentali della teoria dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie.

Nella Parte II viene presentato un approccio alla risoluzione di problemi di controllo ottimo (in tempo continuo) e un risultato di esistenza di soluzioni.

Nella Parte III vengono forniti i primi rudimenti della teoria della misura e dell'integrazione e, come caso particolare, viene introdotto l'integrale di Lebesgue, dando enfasi ai risultati di convergenza (monotona e dominata).

## Programma esteso

Parte I (ODE):

- Equazioni differenziali in modelli economici, problemi di Cauchy e relativa nozione di soluzione.
- Riduzione di sistemi di ordine superiore al primo a sistemi del primo ordine.
- Risoluzione esplicita di alcune classi di equazioni differenziali: equazioni a variabili separabili, equazioni lineari, equazioni di Bernoulli, equazioni omogenee, equazioni esatte.
- Alcune applicazioni a modelli (evoluzione di prezzi di mercato soggetti ad aggiustamento, modello macroeconomico di crescita di Solow).
- Teoremi di esistenza ed unicità in piccolo ed in grande di soluzioni per problemi di Cauchy.
- Soluzioni d'equilibrio ed alcune nozioni di stabilità (Lyapunov, asintotica locale/globale) per soluzioni d'equilibrio.
- Elementi per l'analisi qualitativa di equazioni differenziali autonome.
- Sistemi di equazioni differenziali lineari: metodi per la risoluzione esplicita e per l'analisi della stabilità di soluzioni d'equilibrio.

Parte II (Controllo Ottimo):

- Ottimizzazione dinamica: descrizione di problemi di controllo.
- Il principio del massimo di Pontryagin (caso a dinamica lineare e caso generale).
- Condizioni sufficienti di ottimalità (condizione di Mangasarian e condizione di Arrow).
- Applicazioni ad alcuni modelli economici (modello di compravendita ottima, problema di massimizzazione della vendita).
- Il problema più semplice del calcolo delle variazioni come caso particolare di un problema di controllo ottimo e relativa applicazione (modello di investimento/pianificazione del consumo ottimo).
- Una condizione di esistenza di controllo ottimo (teorema di Fillipov).

Parte III (Elementi di teoria della misura):

- Algebre e  $\sigma$ -algebre,  $\sigma$ -algebre generate.
- Misure su  $\sigma$ -algebre e loro proprietà.
- Costruzione della misura di Lebesgue in  $\mathbb{R}^n$ .
- Funzioni misurabili e loro proprietà.
- Integrale in uno spazio di misura e sue proprietà.
- Misure definite a mezzo di integrale ed assolutamente continue.
- Teoremi di convergenza (dominata e monotona).
- L'integrale di Riemann e di Lebesgue a confronto.

## Prerequisiti

Nessuna propedeuticità. E' utile che lo studente ripassi le proprie competenze sui seguenti argomenti di matematica, tipicamente impartiti in corsi di laurea triennali:

- Numeri complessi (nozioni di base);
- Calculus per funzioni di più variabili reali;
- Calcolo matriciale, determinante, invertibilità, rango;
- Autovalori e riduzione in forma diagonale di matrici;
- Forme quadratiche;
- Convessità/concavità di insiemi e funzioni.

## Metodi didattici

L'intera attività formativa verrà svolta attraverso lezioni.

Durante lo svolgimento del corso verranno proposti esercizi da risolvere autonomamente in preparazione all'esame, alcuni dei quali verranno poi discussi in sessioni organizzate dal docente.

## Modalità di verifica dell'apprendimento

L'esame si svolgerà in forma scritta. Non sono previste prove parziali in itinere.

Il formato di una prova scritta prevede essenzialmente tre tipi di quesito:

- la risoluzione di problemi;
- la discussione in dettaglio di alcuni modelli presentati nel corso;
- l'esposizione di alcuni argomenti della teoria e la loro applicazione in casi specifici.

Nello svolgimento di una prova d'esame saranno valutati la capacità di analisi e di classificazione di un problema proposto, la capacità di scelta ed applicazione delle metodologie di risoluzione prospettate nella teoria, la precisione e la completezza espositiva nella discussione di modelli e dell'apparato teorico svolto nel corso.

Il docente del corso rende anche disponibile materiale per la simulazione di una prova d'esame.

## Testi di riferimento

Appunti delle lezioni e materiale per le esercitazioni a cura del docente del corso.

Lectures consigliate per integrare le lezioni:

1. **A. Guerraggio - S. Salsa, *Metodi matematici per l'economia e le scienze sociali*, G. Giappichelli Editore, Torino, 1997.**
2. **K. Sydsæter - P. Hammond - A. Seierstad - A. Strøm, *Further Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, Harlow, 2008.**

Le videolezioni registrate saranno messe a disposizione, ad uso degli studenti, sulla pagina in E-learning dedicata al corso.

## **Periodo di erogazione dell'insegnamento**

Secondo semestre, secondo ciclo.

## **Lingua di insegnamento**

Italiano.

## **Sustainable Development Goals**

---