

COURSE SYLLABUS

Calculus and Statistics

2324-2-E3201Q116

Obiettivi

- Conoscere e comprendere i fondamenti dell'algebra lineare, del calcolo differenziale in più variabili reali, delle equazioni differenziali e della statistica descrittiva e inferenziale.
- Fornire una solida base di conoscenze matematiche e statistiche necessarie per l'analisi quantitativa dei dati ambientali.
- Sviluppare la capacità degli studenti di applicare i concetti matematici e statistici alla risoluzione di problemi ambientali concreti.
- Acquisire autonomia di giudizio nella applicazione delle metodologie apprese.
- Essere in grado di esporre in modo preciso ed esaustivo sia le conoscenze teoriche acquisite che le soluzioni, sviluppate in autonomia, di esercizi e problemi.
- Acquisire i prerequisiti necessari per la comprensione dei contenuti di tipo modellistico/matematico dei successivi corsi erogati all'interno del Corso di Laurea.

Contenuti sintetici

- Vettori in \mathbb{R}^n , matrici.
- Calcolo differenziale.
- Equazioni differenziali.
- Statistica descrittiva.
- Probabilità di base.
- Statistica inferenziale.

Programma esteso

- Algebra lineare.

Spazi vettoriali: somma di vettori, prodotto per uno scalare. Lo spazio vettoriale \mathbb{R}^n : prodotto interno, norma di un vettore e sue proprietà. Disuguaglianza di Schwarz, disuguaglianza triangolare, combinazioni lineari, vettori dipendenti ed indipendenti. Matrici e operazioni tra matrici: matrice trasposta, somma di matrici, prodotto per uno scalare e prodotto tra matrici. Sistemi di equazioni lineari e metodo di eliminazione di Gauss.

- Curve

Funzioni vettoriali di una variabile reale, limiti e continuità. Curve, curve chiuse, curve semplici e curve piane. Sostegno di una curva. Derivata e versore tangente a una curva. Archi di curva regolari e regolari a tratti.

- Calcolo differenziale per funzioni di più variabili reali

Insiemi in \mathbb{R}^n . Intorni sferici. Funzioni di più variabili reali: introduzione e primi esempi, esempio delle funzioni di stato. Grafici e insiemi di livello. Definizione e proprietà dei limiti per funzioni di più variabili. Limiti finiti. Funzioni continue. Derivate parziali e gradiente, definizione di differenziabilità, legame tra differenziabilità e continuità e tra differenziabilità e derivabilità. Derivabilità lungo una direzione assegnata e formula del gradiente, significato geometrico del gradiente. Condizione sufficiente per la differenziabilità e la classe $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Il differenziale primo. Derivata della funzione composta: il caso $p(x)=g(f(x))$ con $f:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e il caso $p(t)=f(r(t))$ con $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $r:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Curve di livello e gradiente. Funzioni positivamente omogenee e teorema di Eulero, applicazione ai potenziali termodinamici. Derivate di ordine superiore e matrice Hessiana. Teorema di Schwarz e la classe C^2 . Relazioni di Maxwell in termodinamica. Funzioni vettoriali di più variabili reali, matrice Jacobiana. Caso generale del teorema di derivazione della funzione composta. Punti estremanti. Estremi liberi e vincolati. Punti stazionari (o critici). Condizione necessaria per estremanti liberi (teorema di Fermat).

- Equazioni differenziali

Definizione. Equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali con esempi. Modello di crescita esponenziale e modello logistico. Ordine di un'equazione differenziale e sistemi di equazioni differenziali. Equazioni differenziali in forma normale ed equivalenza con sistemi del primo ordine. Problema di Cauchy. Problema di Cauchy per equazioni differenziali in forma normale di ordine n . Teorema di esistenza (Peano) e teorema di esistenza e unicità locale. Soluzione delle equazioni differenziali a variabili separabili e delle equazioni differenziali lineari del primo ordine. Equazioni differenziali lineari di ordine n omogenee e non omogenee. Struttura dell'integrale generale delle omogenee e delle non omogenee. Soluzione delle equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti di ordine 2. Equazioni differenziali associate al circuito RLC e all'oscillatore armonico smorzato e rispettivi integrali generali. Soluzione particolare di un'equazione lineare a coefficienti costanti non omogenea quando il termine non omogeneo è un polinomio o un esponenziale (metodo di somiglianza). Cenni alla soluzione qualitativa delle equazioni differenziali autonome: singole equazioni e sistemi 2×2 . Analisi qualitativa delle soluzioni dei seguenti modelli: equazione logistica; equazione logistica con estinzione e raccolta; modello di Lotka-Volterra preda-predatore; modello per due specie in competizione.

- Statistica descrittiva

Frequenze assolute e relative. Istogrammi e diagrammi di dispersione. Media campionaria. Mediana e quantili. Varianza e deviazione standard campionarie. Box plot. Coefficiente di correlazione lineare.

- Accenni di probabilità

Spazio campionario ed eventi. Definizione e intuizione della probabilità. Proprietà di base della probabilità. Variabili aleatorie discrete. Valore atteso e varianza nel caso discreto. Distribuzioni notevoli discrete (uniforme, Bernoulli, Binomiale). Variabili aleatorie continue. Valore atteso e varianza nel caso continuo. Distribuzione normale e chi quadro. Indipendenza di variabili aleatorie.

- Statistica inferenziale

Legge dei grandi numeri e teorema del limite centrale. Distribuzioni delle statistiche campionarie. Stimatori. Intervalli di confidenza. Intervalli della media per campione normale a varianza nota. Intervalli della varianza per campione normale a media e varianza ignote. Verifica di ipotesi tramite test. Tipi di errori. Livello di significatività e p-value. Test Z per la media di una popolazione normale con varianza nota. Test di adattamento di chi-quadro. Regressione lineare semplice.

Prerequisiti

Calcolo differenziale e integrale per funzioni reali di una variabile reale. Non vi sono propedeuticità formali, ma è necessario conoscere e saper maneggiare i contenuti del corso di Matematica I per poter seguire il corso con profitto.

Modalità didattica

Lezioni frontali (erogate in lingua italiana), 6 cfu (48 ore)
Esercitazioni (erogate in lingua italiana), 2 cfu (20 ore)

Materiale didattico

- Matematica Generale, A. Guerraggio, Bollati Boringhieri. (Algebra lineare)
- Analisi Matematica II, M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, ZANICHELLI. (Calcolo differenziale in più variabili ed equazioni differenziali)
- Probabilità e statistica per l'ingegneria e le scienze, S. M. Ross, Apogeo.
- Esercitazioni di Analisi Matematica 2, M. Bramanti, Esculapio, Bologna. (Esercizi)
- Esercizi di calcolo delle probabilità e statistica, D. Bertacchi, M. Bramanti, G. Guerra, Esculapio.
- Probabilità & Statistica 600 esercizi d'esame risolti, M. Verri, Esculapio.

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Primo semestre

Modalità di verifica del profitto e valutazione

L'esame è strutturato in una prova scritta obbligatoria e in una prova orale facoltativa (su richiesta o dello studente o del docente) a cui si può accedere se si è ottenuto un punteggio di almeno 18 nella prova scritta.

La prova scritta è divisa in due parti. Nella prima parte verrà richiesto di rispondere a 4 domande aperte di teoria ciascuna delle quali vale 3 punti. In questa prima parte della prova scritta gli studenti saranno valutati sulla loro comprensione dei concetti matematici e statistici fondamentali affrontati durante il corso. Gli studenti dovranno dimostrare la loro conoscenza teorica e la capacità di spiegare i concetti chiave. Nella seconda parte si richiede di

risolvere alcuni esercizi/problemi, di solito 4. Ogni esercizio vale 5 punti se non diversamente indicato. In questa parte della prova verrà valutata la capacità di applicare le conoscenze apprese alla risoluzione di esercizi e problemi e la capacità comunicare in modo chiaro ed efficace il procedimento per la soluzione degli stessi. La prova va svolta in 120 minuti. Per superare l'esame occorre una votazione di almeno 18.

La prova orale facoltativa ed è costituita da un colloquio sugli argomenti svolti a lezione. Verrà valutata sia la comprensione teorica che la capacità degli studenti di applicare i concetti matematici e statistici alla risoluzione di problemi anche concreti. In base all'andamento della prova orale, il voto ottenuto nella prova scritta potrà essere aumentato al massimo di 4 punti o diminuito fino all'insufficienza in caso di grave impreparazione.

Prove parziali: Durante il periodo delle lezioni si svolgono di norma due prove parziali che sostituiscono, in caso di superamento, la prova scritta. Le prove parziali sono strutturate come le prove scritte, la prima prova parziale verterà sul programma svolto fino a quando viene effettuata la prova. La seconda prova verterà sul programma rimanente. Le prove si intendono superate se si ottiene un punteggio di almeno 18 in entrambe le prove e il voto finale sarà la media aritmetica dei due voti.

Durante lo svolgimento delle prove non sarà concessa la consultazione di materiale didattico (testi, eserciziari, appunti personali, formulari) e non sarà consentito l'uso di telefoni cellulari, tablet, pc, smartwatch, ecc. È consentito l'utilizzo di una calcolatrice scientifica non programmabile e non grafica.

Orario di ricevimento

Su appuntamento

Sustainable Development Goals
