UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

# COURSE SYLLABUS

## Geometric Analysis

**2324-1-F4001Q113**

---

### Obiettivi

Fornire un'introduzione alla teoria dell'analisi su spazi metrici, mettendone in luce gli aspetti geometrici e le basi del calcolo differenziale.

I risultati di apprendimento attesi comprendono:

- la conoscenza e la comprensione delle definizioni e degli enunciati fondamentali, nonché di alcune strategie di dimostrazione; la conoscenza e la comprensione di alcune classi di esempi fondamentali a cui la teoria si applica.
- la capacità di riconoscere e analizzare gli spazi metrici (di lunghezza, intrinseci e di misura) che possono nascere da diversi ambiti della matematica; la capacità di determinare alcune proprietà geometriche e analitiche fondamentali di uno spazio metrico e di saper introdurre un calcolo differenziale al primo ordine su questi spazi; la capacità di esporre in modo chiaro i contenuti del corso, di manipolare alcuni esempi e di individuare connessioni tra i diversi argomenti trattati nel corso.

### Contenuti sintetici

Nozioni basilari e aspetti geometrici (tra cui la curvatura) degli spazi metrici di lunghezza.

Elementi di analisi e di calcolo differenziale al primo ordine su spazi metrici di misura.

### Programma esteso

**Parte I.** Spazi metrici (intrinseci) e curvatura.

- Spazi metrici: definizione, esempi, topologia; misura e dimensione di Hausdorff.
- Spazi di lunghezza, metriche intrinseche, geodetiche, lunghezza e velocità; costruzioni e esempi.
- Spazi di curvatura limitata: alcune definizioni equivalenti di curvatura limitata (dall'alto o dal basso) per uno spazio metrico; angoli; costruzioni e esempi.
- Convergenza di spazi metrici: convergenza uniforme; definizioni e proprietà della distanza di Gromov-Hausdorff.
- Panoramica sulle proprietà degli spazi metrici a curvatura positiva: crescita dei volumi, dimensione di Hausdorff; globalizzazione; esempi (coni, superfici convesse,...); cenni a risultati di compattezza.

**Parte II.** Analisi e calcolo differenziale su spazi metrici di misura

- Spazi metrici di misura; proprietà del raddoppio; lemmi di ricoprimento: teorema di Vitali, teorema di Lebesgue.
- Funzione massimale di Hardy-Littlewood: risultati di limitatezza.
- Richiami su spazi di Sobolev in R^n; immersioni di Sobolev; disuguaglianze di Poincaré.
- Spazi di Sobolev su spazi metrici: approccio via la funzione massimale; funzioni lipschitziane: teoremi di estensione e di densità.
- Gradiente superiore, moduli di una famiglia di curve, capacità; spazi di Sobolev newtoniani su spazi metrici: definizioni e proprietà.
- Cenni a equazioni differenziali su spazi metrici: disuguaglianze di Poincaré su spazi metrici; funzioni armoniche e problemi di Dirichlet.

## Prerequisiti

Calcolo in più variabili; fondamenti di teoria della misura e della teoria degli spazi Lp.

Una conoscenza di base degli spazi di Sobolev in R^n può aiutare nella fruizione della seconda parte del corso, ma non è strettamente necessaria.

## Modalità didattica

Le lezioni saranno frontali, con uso di lavagna. Verrà presentata la teoria, accompagnata da esempi.

Degli esercizi saranno assegnati mano a mano. La loro soluzione potrà essere discussa in classe, o durante i ricevimenti, su richiesta degli studenti.

Il corso è previsto in lingua italiana ma potrebbe essere tenuto in lingua inglese in presenza di studenti stranieri

## Materiale didattico

I principali testi di riferimento sono i seguenti.

Per la prima parte del corso:


- D. Burago, Y. Burago, and S. Ivanov. *A course in metric geometry*, volume 33 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001

Per la seconda parte del corso:

- J. Heinonen. *Lectures on analysis on metric spaces*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001
- A. Björn, J. Björn, *Nonlinear potential theory on metric spaces*. EMS Tracts in Mathematics, 17. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2011. xii+403 pp.

Saranno messe a disposizione degli studenti delle note redatte dal docente che contengono i concetti, i risultati, le dimostrazioni e buona parte degli esempi trattati a lezione.

## Periodo di erogazione dell'insegnamento

II semestre.

## Modalità di verifica del profitto e valutazione

L’esame consiste in una prova orale conclusiva con voto in trentesimi. Non sono previste prove in itinere.

L'esame orale sarà principalmente un colloquio sugli argomenti svolti a lezione, teso a verificare il livello delle conoscenze, l’autonomia di analisi e giudizio e le capacità espositive acquisite dallo studente. Qualche facile esercizio o esempio non trattato a lezione potrà essere discusso.

Il corso è diviso in due parti principali (si veda la voce "programma esteso" per maggiori dettagli).
Per l'esame è possibile concentrarsi maggiormente su una delle due parti (a scelta) da conoscere in dettaglio, e dell'altra parte conoscere più a grandi linee i concetti, gli oggetti e le definizioni, ma non necessariamente gli enunciati rigorosi dei risultati e le dimostrazioni.

E' anche possibile scegliere un breve argomento di approfondimento, concordato con, ed eventualmente (ma non necessariamente) proposto dal, docente con cui cominciare l'esame.

## Orario di ricevimento

Su appuntamento.

## Sustainable Development Goals