

COURSE SYLLABUS

Higher Analysis

2324-1-F4001Q055

Obiettivi

Fornire un'introduzione alla teoria delle distribuzioni e agli spazi di Sobolev.

I risultati di apprendimento attesi comprendono:

- **Conoscenze:** la conoscenza e la comprensione delle definizioni e degli enunciati fondamentali, nonché delle strategie di dimostrazione basilari utilizzate nell'analisi moderna; la conoscenza e la comprensione di alcuni esempi chiave in cui si esplica la teoria.
- **Capacità:** la capacità di riconoscere il ruolo dei concetti e degli strumenti avanzati dell'analisi moderna introdotti (tra cui convoluzione, distribuzioni, spazi di Sobolev) in diversi ambiti della matematica pura e applicata (analisi numerica, fisica matematica, probabilità); la capacità di applicare tale bagaglio concettuale alla costruzione di esempi concreti e alla risoluzione di esercizi; la capacità di esporre, comunicare e argomentare in modo chiaro e preciso sia i contenuti teorici del corso, sia le loro applicazioni a situazioni specifiche, anche inerenti ad altri ambiti.

Contenuti sintetici

Nozioni basilari sugli spazi vettoriali topologici, con particolare riferimento agli spazi di funzioni test e di distribuzioni, studio delle proprietà fondamentali delle distribuzioni e di alcune loro applicazioni, spazi di Sobolev, problemi ellittici del secondo ordine.

Programma esteso

Capitolo 1. **Spazi vettoriali topologici**

Spazi vettoriali topologici, spazi di Frechet, dualità, limitatezza.

Capitolo 2. **Distribuzioni e operazioni con le distribuzioni**

Distribuzioni, distribuzioni temperate. Le principali operazioni con le distribuzioni e le distribuzioni temperate: derivazione, convoluzione, pull-back.

Capitolo 3. **Applicazioni**

Applicazioni alle soluzioni fondamentali di operatori differenziali classici.

Capitolo 4. **Spazi di Sobolev**

Motivazioni, definizioni e proprietà. Proprietà degli spazi di Sobolev: $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach, approssimazione con funzioni regolari, prodotto e composizione di funzioni in spazi di Sobolev. Spazi di Sobolev in dimensione 1: esistenza di un rappresentante continuo e teorema fondamentale del calcolo per funzioni $W^{1,p}(a, b)$. Teorema di Morrey. Disuguaglianza di Sobolev (Teorema di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg). Immersioni di Sobolev. Operatore di prolungamento e teorema del prolungamento per il semispazio e per domini limitati regolari. Approssimazione globale con funzioni lisce. Immersioni di Sobolev per domini di estensione. Immersioni per spazi di Sobolev di ordine superiore. Teorema di Rellich-Kondrachov. Esistenza dell'operatore di traccia $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\partial\Omega)$ per $1 < p < +\infty$ e Ω semispazio o dominio limitato regolare. Cenni agli spazi di Sobolev di ordine frazionario, teorema di Gagliardo. Caratterizzazione di $W^{1,p}(\Omega)$ tramite le tracce.

Capitolo 5. **Problemi ellittici del secondo ordine**

Lemma di Lax-Milgram. Problemi ellittici del secondo ordine: formulazione variazionale, esistenza di soluzioni. Disuguaglianza di Poincaré. Principio di Dirichlet. Problemi ellittici con condizioni al bordo di Neumann: formulazione variazionale e cenni agli spazi $H(\text{div}, \Omega)$. Disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger. Esistenza di soluzioni per il problema di Neumann sotto condizioni di compatibilità sui dati.

Prerequisiti

Calcolo in più variabili, algebra lineare, fondamenti di spazi di Hilbert e di spazi L^p .

Modalità didattica

Lezioni frontali, con uso di lavagna. Parte delle ore sarà dedicata all'illustrazione dei principali risultati della teoria; la rimanente parte sarà dedicata allo svolgimento di esercizi, in precedenza assegnati, di applicazione della teoria svolta.

Materiale didattico

- Dispense disponibili sulla pagina e-learning del corso.
- A. Bressan. *Lecture Notes on Functional Analysis*. American Mathematical Society, 2013.
- H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- L.C. Evans. *Partial differential equations*, American Mathematical Society.

Periodo di erogazione dell'insegnamento

I semestre.

Modalità di verifica del profitto e valutazione

L'esame consiste in una prova scritta, tesa a verificare il livello delle conoscenze e la capacità di applicarle alla risoluzione di esercizi, l'autonomia di analisi e giudizio, nonché le capacità espositive acquisite dallo studente. La prova si articola in due parti: la prima parte contiene domande di carattere teorico (dimostrazioni di parte dei risultati discussi a lezione), mentre la seconda richiede di risolvere esercizi di applicazione della teoria, sovente di tipo simile a quelli illustrati durante le esercitazioni. Le due parti concorrono in egual misura alla determinazione del voto complessivo finale.

Orario di ricevimento

Su appuntamento.

Sustainable Development Goals
