UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

COURSE SYLLABUS

Differential Geometry

2324-1-F4001Q071

Obiettivi

Lo scopo dell'insegnamento è introdurre lo studente alla teoria delle varietà riemanniane, ossia le varietà differenziali dotate di una metrica riemanniana, che consiste nell'assegnazione di un prodotto scalare euclideo a ogni spazio tangente, che vari in modo liscio con il punto base. Il corso si propone di familiarizzare lo studente con i concetti e le tecniche di base della geometria differenziale, partendo dal concetto fondante di connessione di Levi-Civita come generalizzazione dal contesto 'piatto' a quello 'curvo' della derivata ordinaria di un campo vettoriale. A partire dalla connessione di Levi Civita, verranno infatti introdotti gli invarianti di curvatura e le geodetiche. Un aspetto che ci si propone di illustrare è l'interazione tra le caratteristiche locali della struttura riemanniana, compendiate dalla curvatura, e la 'forma globale' della varietà stessa, ossia le sue caratteristiche topologiche.

Al termine del corso ci si attende che gli studenti abbiano acquisito:

1. le nozioni e i risultati basilari della Geometria Riemanniana classica.
2. le abilità di verifica, su esempi concreti, delle principali proprietà geometriche delle varietà Riemanniane.
3. la capacità di rielaborare quanto visto a lezione e di procedere in modo autonomo allo studio di aspetti avanzati della teoria completando i dettagli delle varie argomentazioni presenti.

Contenuti sintetici

Partendo dal problema dell'esistenza di una metrica Riemanniana su una generica varietà differenziale, si passerà alla nozione di derivazione di Levi-Civita, e di corrispondente trasporto parallelo, che consentirà di definire il concetto di curva geodetica come curva ad accelerazione nulla. Lo studio del tensore di curvatura di Riemann e delle sue tracce, anche concretizzato al caso delle superfici regolari nello spazio Euclideo, precederà la parte culminante del corso che, tempo permettendo, sarà dedicata ad alcuni aspetti globali quali la caratterizzazione della completezza in accordo al teorema di Hopf-Rinow e il legame tra il segno della curvatura e la topologia di una varietà Riemanniana completa.

Programma esteso

1. Cenno alle superfici regolari nello spazio Euclideo e loro curvature
2. Definizione ed esistenza delle metriche Riemanniane
3. Connessione di Levi-Civita e trasporto parallelo
4. Geodetiche e mappa esponenziale
5. Campi di Jacobi e punti coniugati
6. La struttura metrica intrinseca di una varietà Riemanniana
7. Le curvature di una varietà Riemanniana
8. Risultati globali (tempo permettendo)
   8.1) Teoria globale delle geodetiche e completezza
   8.2) I teoremi di Bonnet-Myers e di Cartan-Hadamard

Prerequisiti

Calcolo differenziale in più variabili, nozioni di base sulle varietà differenziabili, algebra lineare e multilineare.

Modalità didattica

Lezioni frontali, affiancate da esercizi da svolgere a casa e dallo studio individuale di un argomento avanzato e non esposto a lezione

Il corso è previsto in lingua italiana ma potrebbe essere tenuto in lingua inglese in presenza di studenti stranieri.

Materiale didattico

Testi di base

M. P. do Carmo *Riemannian geometry*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.

Lee, John M. *Introduction to Riemannian manifolds*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 176. Springer, Cham, 2018.

Tu, Loring W. *Differential Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 275.

Ulteriore materiale didattico (come le note delle lezioni) verrà fornito durante il corso

Testi per approfondimenti

S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine *Riemannian geometry*. Third edition. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

P. Petersen, *Riemannian Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 171. Springer, 2006.

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Secondo semestre

Modalità di verifica del profitto e valutazione

La verifica dell’apprendimento consisterà di due parti:

1. Un esame orale tradizionale, durante il quale lo studente dovrà mostrare di aver acquisito le nozioni di base, le dimostrazioni dei principali teoremi, e la capacità di analisi e calcolo su alcuni esempi concreti.

2. Un seminario con il quale lo studente deve dimostrare di aver acquisito la capacità di comprendere individualmente un argomento avanzato non esposto a lezione, completando tutti i dettagli delle argomentazioni.

Orario di ricevimento

Su appuntamento

Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÁ