



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

## COURSE SYLLABUS

### Functional Analysis

2324-1-F4001Q075

---

#### Obiettivi

Coerentemente con gli obiettivi formativi del corso di studio, l'insegnamento si propone di fornire allo studente le conoscenze riguardanti i fondamenti dell'Analisi Funzionale. Verranno altresì fornite le competenze necessarie a comprendere e analizzare le principali tecniche e i metodi dimostrativi connessi alla teoria, e le abilità utili ad applicarle per affrontare problemi in diversi ambiti della matematica. Particolare enfasi verrà posta sulla risoluzione di problemi.

#### Contenuti sintetici

Spazi localmente compatti di Hausdorff. Spazi di funzioni continue. Spazi  $L^p$ . Compattezza in  $C^0$  e in  $L^p$ . Topologia deboli e debole\* (debole stella). Compattezza nelle topologie deboli. Teoremi di rappresentazione di Riesz.

#### Programma esteso

Spazi metrici, spazi vettoriali normati, compattezza della bolla chiusa e dimensione.

Spazi di funzioni continue. Lemma di Urysohn e cut-offs. Il Teorema di Stone-Weierstrass: densità e separabilità. Compattezza negli spazi di funzioni continue: il Teorema di Ascoli-Arzelà.

Spazi  $L^p$  e loro proprietà basilari. Il Teorema di Lusin: densità e separabilità. Compattezza negli spazi  $L^p$ : il Teorema di Kolmogorov-Riesz. L'embedding canonico di Frechet-Kuratowski per spazi metrici separabili e non separabili.

Funzionali lineari e topologia debole su uno spazio normato. Funzionali subadditivi positivamente omogenei. Forma

generale del Teorema di Hahn-Banach. Convessità e separazione mediante iperpiani. Il Teorema di Mazur: chiusura debole e forte di insiemi convessi.

Topologia debole\* (debole stella). Biduale ed embedding di James. Il Teorema di Banach-Alaoglu: compattezza debole\* della palla chiusa nel duale.

Spazi riflessivi. Riflessività negli spazi  $L^p$ . Uniforme convessità e riflessività. Convergenza forte e debole in spazi uniformemente convessi. I teoremi di Kakutani e di Eberlein-Smulyan: compattezza debole della palla chiusa e riflessività. Compattezza per successioni nella topologia debole\*.

Spazi vettoriali topologici localmente convessi: definizione e proprietà elementari. Involucro convesso e punti estremali: il teorema di Krein-Milman.

Misure con segno. Il teorema di Radon-Nikodym. Dualità negli spazi di funzioni continue: il Teorema di Rappresentazione di Riesz.

## **Prerequisiti**

Elementi di teoria dell'integrazione astratta, elementi di teoria degli spazi  $L^p$ , elementi di topologia generale. Conoscenze di base sugli spazi di Banach e sugli spazi di Hilbert. Abilità di problem-solving di base.

## **Modalità didattica**

Le lezioni frontali sono organizzate per introdurre i principali concetti teorici, presentare le principali idee nella dimostrazione dei teoremi e analizzare esplicitamente esempi/problemi. Durante il corso saranno assegnati anche degli esercizi da svolgere in autonomia con lo scopo di allenare le proprie capacità di problem solving, e di approfondire qualche aspetto della teoria.

Il corso è previsto in lingua italiana, anche se ovviamente qualche termine inglese verrà utilizzato. Il corso potrebbe essere tenuto in lingua inglese in presenza di studenti che non parlano italiano.

## **Materiale didattico**

### **Referenze bibliografiche**

- H. Brezis. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Universitext. Springer, New York, 2011
- G.B. Folland. Real analysis. Modern techniques and their applications. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
- W. Rudin. Real and complex analysis. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987
- T. Bühler and D. A. Salamon. Functional analysis. Graduate Studies in Mathematics, volume 191. AMS, Providence, RI, 2018

### **Ulteriore materiale**

Sulla pagina E-Learning del corso verranno distribuiti i seguenti documenti:

- Alcune note del corso, o collegamenti a materiale online
- Esercizi e problemi.

## **Periodo di erogazione dell'insegnamento**

Primo semestre.

## **Modalità di verifica del profitto e valutazione**

L'esame sarà scritto, con orale facoltativo. Non sono previste prove in itinere. La parte scritta consisterà nella risoluzione di esercizi/problemi, con lo scopo di testare la comprensione degli studenti sul programma del corso e le loro abilità di problem-solving.

L'orale è facoltativo (a richiesta dello studente o del docente), e consisterà in un colloquio sullo scritto e nella risoluzione di ulteriori esercizi/problemi. Senza l'esame orale non è possibile verbalizzare un voto maggiore o uguale al 28.

## **Orario di ricevimento**

Su appuntamento (da concordare via e-mail).

## **Sustainable Development Goals**

ISTRUZIONE DI QUALITÀ

---