UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

COURSE SYLLABUS

Stochastic Methods and Models

2324-1-F4001Q106

Obiettivi

L'insegnamento si propone di fornire una selezione di strumenti, concetti e modelli avanzati del calcolo delle probabilità e dei processi stocastici, dal punto di vista sia teorico che applicativo.

Al termine del corso lo studente avrà acquisito le seguenti:

- *conoscenze*: una selezione di risultati avanzati del calcolo della probabilità (grandi deviazioni), dei processi stocastici (catene di Markov a tempo continuo) e dei modelli stocastici (grafi aleatori);
- *competenze*: comprensione operativa del linguaggio probabilistico e di tecniche dimostrative avanzate (ad es. coupling);
- *abilità*: capacità di applicare le nozioni teoriche per la risoluzione di esercizi e l'analisi di problemi e modelli.

Contenuti sintetici

L'insegnamento si apre con alcuni risultati di **grandi deviazioni**, teoria che fornisce un quadro che permette di studiare eventi rari su scala esponenziale. Nella seconda parte del corso si approfondiscono le **catene di Markov a tempo discreto** e si introducono le **catene di Markov a tempo continuo**, dando particolare importanza al **Processo di Posson**, l'esempio più importante di processo stocastico a tempo continuo con stati discreti. La terza parte del corso è dedicata ad approfondimenti sulle proprietà delle **passeggiate aleatorie**, un argomento fondamentale e ricco di spunti. L'ultima parte del corso si occupa della **teoria dei grafi aleatori**, un argomento di ricerca che sta ricevendo grande attenzione.

Programma esteso

1. Grandi deviazioni

- Il teorema di Cramér
- Entropia relativa e teorema di Sanov
- Il principio di grandi deviazioni
- Il principio di contrazione, il lemma di Varadhan, il Teorema di Gärtner-Ellis

2. Catene di Markov a tempo discreto e continuo

- Richiami (irriducibilità, classificazione degli stati, ...)
- Proprietà di Markov forte
- Misure invarianti e convergenza all'equilibrio
- Semigruppi e generatori su spazi numerabili
- Processo di Poisson

3. Passeggiate aleatorie

a) Passeggiate aleatorie semplici

- Passeggiate aleatorie semplici monodimensionali
- Teorema di Polya per passeggiate aleatorie semplici d-dimensionale

b) Passeggiate aleatorie su grafi

- Problema di Dirichlet per passeggiate aleatorie su grafi
- Passeggiate aleatorie in ambiente aleatorio sugli interi, il Teorema di Solomon

c) Ricorrenza e transienza per catene di Markov numerabili

- Funzione di Ljapunov e criteri di Foster-Lamperti
- Applicazioni

4. Grafi aleatori

- Introduzione ai grafi aleatori
- Il modello di Erdos-Renyi
- Soglie nel modello di Erdos-Renyi: Connettività e componente gigante

Prerequisiti

Le conoscenze, competenze e abilità impartite negli insegnamenti di calcolo delle probabilità e processi stocastici (variabili aleatorie, martingale, legge condizionale) oltre che quelle impartite nei corsi di analisi matematica.

Modalità didattica

Lezioni frontali articolate in

- lezioni teoriche, in cui si fornisce la conoscenza di definizioni, risultati, dimostrazioni ed esempi rilevanti;
- lezioni pratiche, in cui si forniscono competenze e abilità necessaire per utilizzare le nozioni teoriche per

l'analisi di modelli e la risoluzione di problemi.

Materiale didattico

Testi di riferimento:

- F. den Hollander. *Large Deviations*, Fields Institute Monographs, vol. 14. AMS (2008).
- E. Pardoux. *Markov Processes and Applications: Algorithms, Networks, Genome and Finance*, Wiley (2008).
- Q. Berger, F. Caravenna, P. Dai Pra, *Probabilità: un primo corso attraverso esempi, modelli e applicazioni* (II edizione), Springer (2021).
- T. M. Liggett. *Continous time Markox Processes (An Introduction)*, American Mathematical Society (2010).
- G. Last, M. Penrose. *Lectures on the Poisson Process*, Cambridge University Press (2017).
- S. Asmussen, *Applied Probability and Queues*, Springer (2003).
- R. Durrett. *Probability: theory and examples*. 5th edition (2019). The book can be downloaded for free from his personal webpage https://services.math.duke.edu/~rtd/.
- R. Lyons and Y. Peres, *Probability on Trees and Networks*, Cambridge University Press (2016). The book can be downloaded for free from Lyons homepage https://rdlyons.pages.iu.edu/prbtree/book.pdf.
- R. van der Hofstad. *Random Graphs and Complex Networks*, Cambridge University Press (2017).

Altro materiale:

- Appunti delle lezioni
- Altre referenze / dispense fornite dai docenti

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Secondo semestre

Modalità di verifica del profitto e valutazione

L'esame si articola in due parti: una **consegna di esercizi** svolti in autonomia, che contribuisce per un sesto al voto finale, e una **prova orale**, che contribuisce per cinque sesti al voto finale, espresso in trentesimi.

La **consegna di esercizi** consiste nella risoluzione di alcuni esercizi proposti durante il corso, che lo studente dovrà svolgere in autonomia e consegnare con un anticipo di almeno una settimana rispetto alla prova orale, e ha lo scopo di valutare la continuità dell'apprendimento e le abilità pratiche.

La **prova orale** consiste in un colloquio della durata indicativa di 30-60 minuti in cui vengono valutate la conoscenza delle definizioni, enunciati ed esempi presentati durante il corso e la competenza e abilità nell'esposizione di una selezione di argomenti con i dettagli delle dimostrazioni.

Ci saranno 5 appelli d'esame (due tra giugno e luglio, uno a settembre, due a febbraio).

Orario di ricevimento

Su appuntamento

Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÁ