UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

COURSE SYLLABUS

Stochastic Processes

2324-1-F4001Q059

Obiettivi

Coerentemente con gli obiettivi formativi del Corso di Studio, l'insegnamento si propone di fornire allo studente le *conoscenze* riguardanti le definizioni e gli enunciati fondamentali della teoria dei processi stocastici a tempo discreto. Verranno altresì fornite le *competenze* necessarie a comprendere e analizzare le principali tecniche e metodi dimostrativi connessi alla teoria, e le *abilità* utili ad applicarle per risolvere esercizi e affrontare problemi. Una particolare enfasi verrà posta sulle martingale.

Contenuti sintetici

Complementi di probabilità, Legge e speranza condizionale. Martingale a tempo discreto. Mercati finanziari e Martingale. Esempi e applicazioni.

Programma esteso

- Complementi di Probabilità: Funzione caratteristica, unicità e connessione con la convergenza debole. Vettori gaussiani. Criteri di compattezza rispetto alla convergenza in legge.
- Legge e speranza condizionale. Definizioni e proprietà. Esistenza della speranza condizionale di una variabile aleatoria rispetto a una sigma algebra. Proprietà fondamentali: proprietà della torre, disuguaglianza di Jensen, lemma del congelamento (freezing). Teoremi di passaggio al limite.
- Martingale a tempo discreto. Definizione ed esempi (somme di v.a. indipendenti centrate, prodotto di v.a. indipendenti e di media 1, martingale chiuse). Integrale di un processo prevedibile. Martingale arrestate. Teorema di arresto opzionale. Applicazioni: tempo di primo passaggio di una passeggiata aleatoria su Z; problema della rovina del giocatore. Lemma sugli attraversamenti (upcrossing). Convergenza quasi certa delle martingale limitate in L^1. Martingale limitate in L^2. Uniforme integrabilità e convergenza in L^p.

Dimostrazione della legge forte dei grandi numeri. Disuguaglianza massimale. Disuguaglianza di Doob. Esempi: processi di ramificazione di Galton-Watson. Applicazioni alla convergenza di somme di variabili alaeatorie
- Mercati finanziari a tempo discreto. Arbitraggio e misura martingala equivalente

Prerequisiti

Sono necessarie le nozioni del calcolo differenziale e integrale per funzioni di una e più variabili reali e quelle del calcolo delle probabilità con teoria della misura. È utile conoscere definizioni e prime proprietà degli spazi L^p e degli spazi di Hilbert.

Modalità didattica

Lezioni frontali in aula, articolate in: lezioni teoriche in cui si fornisce la conoscenza di definizioni, risultati ed esempi rilevanti e altre il cui scopo è di fornire competenze e abilità necessarie per utilizzare tali nozioni nella risoluzione di esercizi e nell'analisi di problemi (anche legati ad applicazioni extra-matematiche).

Materiale didattico

- Jean Jacod & Philip Protter: Probability essentials
- D. Williams, Probability with Martingales, Cambridge University Press (1991).
- Dispense e appunti dei docenti (disponibili sulla piattaforma di e-learning).
- Testi e soluzioni dei temi delle prova scritta degli anni precedenti (disponibili sulla piattaforma di e-learning).
- Elenco delle dimostrazioni che possono essere richieste durante la prova orale (disponibili sulla piattaforma di e-learning).

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Primo semestre.

Modalità di verifica del profitto e valutazione

Esame scritto e orale. Voto in trentesimi. Non vengono effettuate prove in itinere

Nella prova scritta, che contiene ESERCIZI e PROBLEMI a risposta aperta, viene valutata la *abilità* operativa di risolvere esercizi utilizzando le conoscenze fornite nel corso. La prova scritta viene valutata con un voto in trentesimi. È necessario ottenere una valutazione di almeno 16/30 nella prova scritta per accedere alla prova orale, che consta in un COLLOQUIO DI DISCUSSIONE SULLO SCRITTO E SUGLI ARGOMENTI SVOLTI A LEZIONE. Nell'orale viene valutata se lo studente ha acquisito le *competenze* necessarie a presentare una selezione delle dimostrazioni svolte in aula, e, soprattutto, la *conoscenza* critica e operativa delle definizioni e dei risultati del

corso, anche mediante l’illustrazione di esempi e controesempi. La valutazione finale risulterà dalla combinazione ragionata tra la valutazione della prova scritta e quella della prova orale. L'esame è superato se il voto è almeno 18/30.

Ci saranno 5 appelli d'esame (due a gennaio-febbraio, due a giugno-luglio e uno a settembre).

Orario di ricevimento

Su appuntamento.

Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÁ