UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

COURSE SYLLABUS

Methods of Mathematical Physics

2324-1-F4001Q120

Obiettivi

Il corso è rivolto alla presentazione dei fondamenti matematici e fisici della teoria classica dei campi, ed in particolare tratta la meccanica dei fluidi. Si presentano le idee, i principi fondamentali e le equazioni base della teoria e si trattano in dettaglio alcuni modelli specifici. Un capitolo importante è rivolto allo studio della teoria delle onde: onde lineari e non lineari, dispersive e non dispersive, ed aspetti delle equazioni solitoniche.

I principali risultati di apprendimento attesi sono:

1) la conoscenza e la comprensione delle definizioni della teoria dei sistemi continui e della dinamica dei fluidi, delle loro motivazioni fisiche, dei teoremi fondamentali e delle principali tecniche di dimostrazione degli stessi.

2) Il riconoscimento e la comprensione delle differenti approssimazioni modellistiche (quali le equazioni costitutive, i processi di linearizzazione e espansione asintotica etc.) utilizzati durante il corso.

3) la capacità di applicare questo bagaglio concettuale all'analisi delle diverse applicazioni; la capacità di esporre, comunicare e argomentare in modo chiaro e preciso sia i contenuti teorici del corso, sia le loro applicazioni a situazioni specifiche anche in relazione ad altri ambiti disciplinari.

4) La capacità di integrare le conoscenze acquisite durante il corso con una elaborazione personale ulteriore, attraverso l'analisi di temi complementari a quelli presentati durante le lezioni

Contenuti sintetici

- Lo spazio delle configurazioni per i corpi continui.
- Il tensore di deformazione ed il tensore degli sforzi. Il gradiente di velocità.
- Teoremi di trasporto e loro formulazione nella geometra delle forme differenziali nello spazio euclideo tridimensionale..

- Le equazioni di conservazione della massa, l'equazione di Cauchy, l'equazione dell'energia e la disuguaglianza entropica.
- La pressione e le equazioni di Eulero.
- Soluzioni statiche e stazionarie.
- Onde sonore e concetto di incomprimibilità.
- Teorema di Bernoulli ed applicazioni.
- Le equazioni di Hemholtz.
- Teoria dell'ala.
- Le equazioni di Navier-Stokes e le loro prime applicazioni.
- Trasformazioni di scala e numero di Reynolds. Lo strato limite e le equazioni di Prandtl.
- Onde di gravità: sistemi aria-acqua e fluidi stratificati. La tensione superficiale.
- Onde di gravità di piccola ampiezza in acqua infinitamente profonda e l'equazione di Schrödinger non lineare.
- Onde in "shallow water": le equazioni di Korteweg - de Vries (KdV), Burgers e Airy. I solitoni.
- Formulazione Hamiltoniana di KdV.
- L'equazione KdV come un sistema Hamiltoniano completamente integrabile

Programma esteso

Il corso inizia con lo studio della deformazione e del moto di un corpo continuo attraverso l'introduzione delle nozioni di gradiente di deformazione e di gradiente di velocità. Questa parte del corso introduce ed utilizza metodi di "*geometria differenziale nello spazio euclideo tridimensionale".*

I teoremi di trasporto di quantità scalari e vettoriali vengono discussi e dimostrati, come parte saliente della cinematica dei corpi continui.

Quindi si passa allo dinamica con lo studio delle azioni che si esercitano sui fluidi. Il centro del discorso è la teoria di Cauchy degli sforzi. Si trattano le equazioni di conservazione della massa, e di bilancio della quantità di moto, del momento angolare e dell'energia. Si discutono brevemente le nozioni di energia interna e di entropia.

Si passa alla caratterizzazione delle proprietà meccaniche (e termiche) dei fluidi mediante le equazioni costitutive e le equazioni di stato. Si considerano i modelli dei fludi comprimibili ed incomprimibili ed eventualmente viscosi.

Poi si studiano più approfonditamente le equazioni del moto, partendo dal modello di Eulero.

Si parte dallo studio di soluzioni statiche, per poi aprire un'ampia "pagina" dedicata alle equazioni di Eulero per i cosiddetti fluidi ideali, ed alle sue conseguenze ed applicazioni, come l'equazione di Bernoulli, le leggi di Helmholtz sull'evoluzione della vorticità e la conservazione della circolazione.

Si tratta poi in dettaglio la teria dell'ala di Kutta-Joukowski.

Il corso prosegue con lo studio delle proprietà salienti dei fluidi viscosi, descritti dall'equazione di Navier Stokes.

Vengono introdotti e discussi i seguenti concetti:

- Il trasporto di quantità di moto tramite "azioni di taglio" e la non-conservazione dell'energia "meccanica" in Navier-Stokes.
- L'autosimilarità e il numero di Reynolds.
- Lo strato limite e le equazioni di Prandtl.

Si passa poi ad una parte più applicativa, dedicata alla teoria delle "water waves", che viene sviluppata secondo i seguenti punti:

- Onde di gravità in un fluido incomprimibile (onde di superficie).
- Onde di gravità in fluidi stratificati (onde interne negli oceani).
- Onde di gravità in presenza di tensione superficiale.
- Dinamica dei gas ed equazioni quasi-lineari: teoria delle caratteristiche e onde di shock.
    - Onde di gravità di piccola ampiezza in acqua infinitamente profonda e l'equazione di Schrödinger non lineare.
- Equazioni dispersive in acqua "poco profonda" (shallow water): l'equazione di Korteweg - de Vries. I solitoni e le onde cnoidali.
- La formulazioni Hamiltoniana di KdV e le costanti del moto.

Prerequisiti

Il corso non richiede la frequenza ad alcun altro corso della laurea Magistrale. Sono necessarie le nozioni dei corsi di Analisi I e II, Algebra lineare e Geometria, Fisica I e II e Sistemi Dinamici e Meccanica Classica della laurea triennale.

Modalità didattica

Lezioni (8CFU).
Il corso è previsto in lingua italiana ma potrebbe essere tenuto in lingua inglese in presenza di studenti stranieri

Materiale didattico

Testi di riferimento

1. P. Chadwick, Continuum Mechanics: Concise Theory and Applications. Dover Publications, 1999.
2. S. Salsa: Partial Differential Equations in Action: from Modeling to theory. Springer, 2008.
3. G. Falkovich, Fluid Mechanics (a short course for physicists). Cambridge University Press, 2011.

Gli appunti delle lezioni sono pubblicati sulla pagina e-learning del corso.

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Primo semestre.

Modalità di verifica del profitto e valutazione

La prima parte dell'esame consiste nella discussione di un breve elaborato scritto preparato autonomamente dallo studente su un argomento scelto tra quelli di una lista fornita entro il termine del corso dal docente. Tale lista

comprenderà anche temi complementari a quelli presentati a lezione. La scelta dell'elaborato va comunicata al docente almeno 10 giorni prima della data della discussione, e una copia dell'elaborato va inviata al docente almeno 2 giorni prima di tale data per una valutazione preliminare dello stesso.

Questa parte è rivolta principalmente alla verifica dei punti 3 e 4 dei "risultati di apprendimento attesi" descritti più sopra. Vengono valutati, anche in relazione alla complessità dell'elaborato scelto, la chiarezza espositiva, la capacità di sintesi e la padronanza dell'argomento.

Nella seconda parte (finalizzata alla verifica dei punti 1 e 2 tra i "risultati di apprendimento attesi") verrà richiesta l'esposizione di alcuni argomenti del programma (scelti dal docente).

Il peso relativo delle due parti dell'esame è paritetico ai fini della valutazione.

Orario di ricevimento

Su appuntamento da richiedersi via e-mail (preferito) o la presente pagina e-learning.

Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÁ