UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

SYLLABUS DEL CORSO

Analisi Matematica I

2425-1-E4101B001

Obiettivi formativi

L'obiettivo principale del Corso è quello di abilitare gli studenti ad un utilizzo consapevole delle fondamentali tecniche di calcolo infinitesimale (differenziale ed integrale) per funzioni di una variabile reale. Le competenze acquisite nel Corso li mettono in grado di:

1) interpretare un'asserzione riguardante i contenuti del Corso ed espressa in linguaggio matematico;

2) utilizzare gli strumenti di base del calculus differenziale ed integrale (limiti, derivate, serie ed integrali) per funzioni di una variabile reale;

3) analizzare alcune proprietà di una funzione di una variabile reale con gli strumenti standard forniti dal calculus differenziale ed integrale (comportamento asintotico, esistenza di zeri, derivabilità, monotonia e simmetrie, proprietà estremali ovvero presenza e localizzazione di punti di massimo e di minimo, integrabilità).

Nel perseguire i summenzionati obiettivi si farà riferimento, ove possible, a contesti di applicazione provenienti dalla modellistica economica (in particolare, microeconomica) e dalla statistica di base.

Contenuti sintetici

I contenuti del Corso possono essere schematicamente suddivisi nei seguenti nuclei concettuali, tra loro strettamente interconnessi:

1) stime asintotiche (limiti, soprattutto nella prospettiva di valutare forme di indecisione e integrabilià/sommabilità);

2) calcolo differenziale (calcolo di derivate prime e successive) e sue applicazioni;

3) serie;

4) integrabilità (alla Riemann) e calcolo integrale.

Programma esteso

1. Numeri e logica: insiemi e concetti di base sugli insiemi (appartenenza, inclusione, quantificatori, operazioni insiemistiche). Sommatorie e coefficienti binomiali: somma di una progressione geometrica, il fattoriale, coefficienti binomiali ed alcune delle loro proprietà. Formula del binomio di Newton e triangolo di Tartaglia.
   Le proprietà algebriche dei numeri reali. La relazione d'ordine sui numeri reali: concetti di limitatezza superiore/inferiore, maggioranti/minoranti, estremo superiore/inferiore, massimo/minimo. Assioma di continuità dell'insieme dei numeri reali. Valore assoluto e sue proprietà.

2. Funzioni: concetto di funzione, dominio e codominio di una funzione. Proprietà di iniettività, suriettività e biettività di una funzione. Equipotenza di insiemi e cardinalità: cardinalità del numerabile e del continuo. Composizione di funzioni. Funzioni limitate, simmetriche, monotone e periodiche. Grafico di una funzione. Operazioni sui grafici. Funzioni invertibili e funzioni inverse. Condizioni per l'invertibilità di una funzione. Funzioni inverse delle funzioni trigonometriche elementari.

3. Limiti e continuità: successioni di numeri reali. Successioni convergenti e concetto di limite per successioni. Unicità del limite e limitatezza delle successioni convergenti. Successioni divergenti e successioni irregolari. Successioni monotone e teorema di monotonia. Limite di successioni monotone non limitate. Limite della successione geometrica della successione armonica generalizzata. Algebra dei limiti. Teorema del confronto. Infiniti, infinitesimi e forme di indecisione. Confronti e stime asintotiche. Criterio del rapporto. Limiti di funzioni, continuità ed asintoti. Punti di accumulazione. Definizione successionale e topologica di limite. Limiti destro e sinistro e loro relazione con il limite. Asintoti orizzontali, obliqui e verticali. Una caratterizzazione per asintoti obliqui. Continuità. Continuità delle funzioni elementari. Algebra delle funzioni continue. Continuità delle funzioni composte. Proprietà del limite: teorema del confronto e permanenza del segno. Algebra dei limiti e cambi di variabile. Limiti notevoli. Relazioni asintotiche. Confronto di infiniti ed infinitesimi. Gerarchie di infiniti. Proprietà globali delle funzioni continue su un intervallo: teorema degli zeri. Punti di massimo/minimo relativi ed assoluti di una funzione. Teorema di Weierstrass.

4. Calcolo differenziale per funzioni di una variabile reale: retta tangente al grafico di una funzione di una variabile reale. Derivabilità di una funzione e nozione di derivata prima. Equazione della retta tangente al grafico. Derivata seconda e successive. Derivata delle funzioni elementari. Regole di calcolo: algebra delle derivate, derivata di una funzione composta e della funzione inversa. Relazione tra continuità e derivabilità. Punti di non derivabilità di una funzione: derivata destra e derivata sinistra, punti angolosi, a tangente verticale e cuspidosi. Metodi per la ricerca di estremi: teorema di Fermat e condizione di stazionarietà. Teorema di Lagrange e test di monotonia. Funzioni a derivata nulla. Teorema di De L'Hospital. Concavità e convessità: insiemi convessi ed epigrafico di una funzione. Convessità/concavità di funzioni.
   Funzioni strettamente convesse/concave. Convessità e rette tangenti. Punti di flesso. Calcolo differenziale ed approssimazioni: uso di "o piccolo" di Landau. Approssimazioni polinomiali: formule di Mc Laurin e di Taylor con resto in forma di Peano e di Lagrange.

5. Serie numeriche: successione delle somme parziali, carattere e somma di una serie. Serie geometrica, serie di P. Mengoli e serie armonica generalizzata. Condizione necessaria per la convergenza. Resto e convergenza della serie dei resti. Criteri per le serie a termini non negativi: criterio del confronto, criterio del confronto asintotico, criterio della radice, criterio del rapporto e criterio di Cauchy. Serie a termini di segno variabile: assoluta convergenza e sua relazione con la convergenza semplice. Serie a termini di segno alternato: criterio di Leibniz. Somma di due serie termine a termine. Serie di Taylor: sviluppabilità in serie di Taylor di funzioni derivabili infinite volte. Sviluppi in serie maggiormente utilizzati (funzioni seno, coseno, esponenziale e logaritmo).

6. Calcolo integrale per funzioni di una variabile: definizione di integrale come limite di somme di Cauchy-

Riemann. Interpretazione dell'integrale come area con segno. Classi di funzioni integrabili. Proprietà dell'integrale: linearità, additività sul dominio, positività e monotonia. Teorema della media integrale. Concetto di primitiva di una funzione. Il primo teorema fondamentale del calcolo integrale. Primitive di funzoni elementari. Metodi di ricerca di primitive: integrazione per scomposizione, per sostituzione e per parti. Integrazione di funzioni razionali fratte. Integrali generalizzati: integrazione di funzioni non limitate e su intervalli non limitati. Analisi della convergenza di situazioni campione. Criteri di integrabilità in senso generalizzato al finito e all'infinito: criterio del confronto e criterio del confronto asintotico. Assoluta integrabilità. Integrabilità in senso generalizzato della funzione gaussiana. Funzioni integrali. Un esempio notevole: la "funzione degli errori". Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale e sue conseguenze. Studio della funzione degli errori. La funzione "gamma di Euler": definizione e principali proprietà.

Prerequisiti

Il Corso non prevede formalmente propedeuticità interne al corso di laurea. E' però fortemente consigliato allo studente un ripasso (eventualmente guidato da tutor) degli argomenti di matematica tipicamente presenti nei programmi delle scuole secondarie superiori. Più precisamente:

1) algebra: equazioni di primo e secondo grado, principio di annullamento del prodotto e principio di identità dei polinomi;

2) geometria analitica: equazioni di rette, coniche (parabole, ellissi, iperboli), funzioni esponenziali e logaritmiche;

3) trigonometria piana: angoli in radianti, funzioni seno, coseno, tangente, identità fondamentale della trigonometria, formule di addizione, duplicazione e di bisezione;

4) disequazioni in una variabile reale.

Metodi didattici

Tutte le lezioni sono svolte in presenza, in modalità erogativa (DE), per un totale di 84 ore.

Le lezioni frontali si propongono di trasmettere l'idea che sta alla base di un concetto o nozione matematici inclusi nel programma, e di abituare gli studenti alla loro formalizzazione. Con questi presupposti, gli studenti vengono condotti ad una corretta interpretazione di asserzioni relative ai contenuti e, successivamente, alla loro applicazione per la risoluzione di vario genere di problemi. Al fine di implementare con efficacia questo schema di trasmissione dei contenuti (cioè, nozione-formalizzazione-relazione con altre nozioni (teoremi)-tecniche di calcolo ed utilizzo in contesti applicativi), durante le lezioni viene dato ampio spazio alla discussione di esempi sia di specifiche nozioni, in casi particolarmente significativi ed illuminanti, sia all'applicazione di tecniche di calcolo e risoluzioni di problemi ad esse relativi.

Vengono anche proposti agli studenti percorsi (opzionali) di verifica del proprio apprendimento, durante l'erogazione del corso, attraverso molteplici serie di esercizi da svolgersi in autonomia, poi discussi in apposite sessioni di confronto con i tutor. L' occasione fornisce la possibilità di interagire con il personale docente (titolare del corso e tutor), anche al fine di evidenziare criticità che si manifestino nella fase di apprendimento.

Modalità di verifica dell'apprendimento

La modalità di verifica si basa su una prova scritta obbligatoria, e, in caso di superamento della prova scritta con una valutazione sufficiente (>=18/30), su una prova orale facoltativa (su richiesta del docente o della/o studentessa/studente). In alternativa alla prova scritta, lo studente può sostenere due prove scritte in itinere (prove parziali) che avranno luogo una sola volta durante l'anno accademico, rispettivamente a metà circa del Corso e subito dopo il termine delle lezioni.

Le prove scritte, sia parziali che comprensive di tutto il programma, posseggono la medesima struttura. Esse sono volte ad accertare l'acquisizione di competenze teoriche, di tecniche di calcolo e d'utilizzo dei principali strumenti, e di capacità di risolvere problemi analoghi a quelli discussi in aula durante le lezioni del Corso.

Esse si strutturano in due parti. La prima parte si compone di un TEST A 5 RISPOSTE CHIUSE (quesiti con scelta a risposta multipla) sugli argomenti principali del Corso, con la finalità di rilevare l'acquisizione dei fondamentali del programma. La seconda parte contiene 4 PROBLEMI/ESERCIZI e 2 DOMANDE APERTE. La risoluzione di problemi/esercizi richiede la razionalizzazione di una questione matematica, l'applicazione di uno o più principi, talora opportunamente combinati, nonchè l'uso degli strumenti di calcolo appresi, mentre nelle domande aperte è richiesta una succinta ma pertinente esposizione teorica (ad esempio, la definizione formale di nozioni, la formulazione di enunciati e, ove previsto, la loro giustificazione, il confronto tra nozioni, esempi e/o controesempi) degli argomenti in programma.

La prova orale, facoltativa, è intesa ad accertare l'apprendimento di tutti gli elementi di teoria proposti a lezione nonchè la capacità di applicazione degli stessi. Essa prevede pertanto un COLLOQUIO DI DISCUSSIONE SULLO SCRITTO, seguito da un COLLOQUIO SU ARGOMENTI SVOLTI A LEZIONE.

Nel caso di superamento dell'esame, il voto finale è determinato dalla somma del voto conseguito nella prima parte e del voto conseguito nella seconda parte. Nel caso delle prove in itinere, il voto finale è determinato come media aritmetica (ove necessario approssimata per eccesso) delle due votazioni conseguite (alla prima ed alla seconda prova).

In caso di superamento della prova scritta e della prova orale, il voto finale sarà determinato dalla media tra l'esito della prova scritta e della prova orale.

I criteri seguiti dalla commissione d'esame per valutare le prove (sia in itinire sia finali) terranno conto del rigore metodologico nella risoluzione dei problemi, delle capacità di espressione precisa e rigorosa di concetti quantitativi, della completezza di trattazione nell'esposizione di questioni teoriche.

Testi di riferimento

M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, Analisi Matematica 1, Zanichelli, Bologna, 2008

S. Salsa, A. Squellati, Esercizi di Analisi matematica 1, Zanichelli, Bologna, 2011

A. Guerraggio, Matematica, Pearson, 2014.

Ulteriore materiale, in particolare esercizi (proposti e risolti) per la verifica dell'apprendimento o simulazioni di prove d'esame, è reso disponibile sulla pagina dedicata al corso.

Per recuperare le nozioni elencate tra i prerequisiti si consiglia, tra gli altri,

M. Buscema, F. Lattanzi, L. Mazzoli, A. Veredice, M. Castellani, F. Gozzi, Precorso di Matematica, Società Editrice Esculapio, Bologna, 2022.

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Il Corso viene erogato nel primo semestre dell'Anno Accademico.

Lingua di insegnamento

Italiano

Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÁ | PACE, GIUSTIZIA E ISTITUZIONI SOLIDE