UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

SYLLABUS DEL CORSO

Analisi Geometrica

2425-1-F4001Q113

Obiettivi

Fornire un'introduzione alla teoria dell'analisi su spazi metrici, mettendone in luce gli aspetti geometrici e le basi del calcolo differenziale.

I risultati di apprendimento attesi comprendono:

- la conoscenza e la comprensione delle definizioni e degli enunciati fondamentali, nonché di alcune strategie di dimostrazione; la conoscenza e la comprensione di alcune classi di esempi fondamentali a cui la teoria si applica.
- la capacità di riconoscere e analizzare gli spazi metrici (di lunghezza, intrinseci e di misura) che possono nascere da diversi ambiti della matematica; la capacità di determinare alcune proprietà geometriche e analitiche fondamentali di uno spazio metrico e di saper introdurre un calcolo differenziale al primo ordine su questi spazi; la capacità di esporre in modo chiaro i contenuti del corso, di manipolare alcuni esempi e di individuare connessioni tra i diversi argomenti trattati nel corso.

Contenuti sintetici

Nozioni basilari e aspetti geometrici (tra cui la curvatura) degli spazi metrici di lunghezza.

Elementi di analisi e di calcolo differenziale al primo ordine su spazi metrici di misura.

Programma esteso

Parte I. Spazi metrici (intrinseci) e curvatura.

- Spazi metrici: definizione, esempi, topologia; misura e dimensione di Hausdorff.
- Spazi di lunghezza, metriche intrinseche, geodetiche, lunghezza e velocità; costruzioni e esempi.
- Spazi di curvatura limitata: alcune definizioni equivalenti di curvatura limitata (dall'alto o dal basso) per uno spazio metrico; angoli; costruzioni e esempi.
- Convergenza di spazi metrici: convergenza uniforme; definizioni e proprietà della distanza di Gromov-Hausdorff.
- Panoramica sulle proprietà degli spazi metrici a curvatura positiva: crescita dei volumi, dimensione di Hausdorff; globalizzazione; esempi (coni, superfici convesse,...); cenni a risultati di compattezza.

Parte II. Analisi e calcolo differenziale su spazi metrici di misura

- Spazi metrici di misura; proprietà del raddoppio; lemmi di ricoprimento: teorema di Vitali, teorema di Lebesgue.
- Funzione massimale di Hardy-Littlewood: risultati di limitatezza.
- Richiami su spazi di Sobolev in R^n; immersioni di Sobolev; disuguaglianze di Poincaré.
- Spazi di Sobolev su spazi metrici: approccio via la funzione massimale; funzioni lipschitziane: teoremi di estensione e di densità.
- Gradiente superiore, moduli di una famiglia di curve, capacità; spazi di Sobolev newtoniani su spazi metrici: definizioni e proprietà.
- Cenni a equazioni differenziali su spazi metrici: disuguaglianze di Poincaré su spazi metrici; funzioni armoniche e problemi di Dirichlet.

Prerequisiti

Calcolo in più variabili; fondamenti di teoria della misura e della teoria degli spazi Lp.

Una conoscenza di base degli spazi di Sobolev in R^n può aiutare nella fruizione della seconda parte del corso, ma non è strettamente necessaria.

Modalità didattica

Si utilizza un approccio didattico ibrido che combina didattica frontale in modalità ergativa (DE) e didattica interattiva (DI). La DE costituisce la parte principale del corso, e include la presentazione e spiegazione dettagliata dei contenuti teorici e di alcuni esempi. La DI prevede interventi attivi degli studenti tramite riposte a esercizi e problemi, brevi interventi e discussioni collettive. Non è possibile stabilire precisamente a priori il numero di ore dedicate alla DE e alla DI, poiché le modalità si intrecciano in modo dinamico per adattarsi alle esigenze del corso e favorire un apprendimento partecipativo e integrato, combinando teoria e pratica.

Le lezioni (56 ore, 8 CFU) sono in presenza e si svolgono in italiano, e ove necessario, in inglese.

Degli esercizi saranno assegnati mano a mano. La loro soluzione potrà essere discussa, oltre che in classe, anche durante i ricevimenti su richiesta degli studenti.

Materiale didattico

I principali testi di riferimento sono i seguenti.

Per la prima parte del corso:

- D. Burago, Y. Burago, and S. Ivanov. *A course in metric geometry*, volume 33 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001

Per la seconda parte del corso:

- J. Heinonen. *Lectures on analysis on metric spaces*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001
- A. Björn, J. Björn, *Nonlinear potential theory on metric spaces*. EMS Tracts in Mathematics, 17. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2011. xii+403 pp.

Saranno messe a disposizione degli studenti delle note redatte dal docente che contengono i concetti, i risultati, le dimostrazioni e buona parte degli esempi trattati a lezione.

Periodo di erogazione dell'insegnamento

II semestre.

Modalità di verifica del profitto e valutazione

L’esame consiste in una prova orale conclusiva con voto in trentesimi. Non sono previste prove in itinere.

L'esame orale sarà principalmente un colloquio sugli argomenti svolti a lezione, teso a verificare il livello delle conoscenze, l’autonomia di analisi e giudizio e le capacità espositive acquisite dallo studente. Qualche facile esercizio o esempio non trattato a lezione potrà essere discusso.

Il corso è diviso in due parti principali (si veda la voce "programma esteso" per maggiori dettagli).
Per l'esame è possibile concentrarsi maggiormente su una delle due parti (a scelta) da conoscere in dettaglio, e dell'altra parte conoscere più a grandi linee i concetti, gli oggetti e le definizioni, ma non necessariamente gli enunciati rigorosi dei risultati e le dimostrazioni.

E' anche possibile scegliere un breve argomento di approfondimento, concordato con, ed eventualmente (ma non necessariamente) proposto dal, docente con cui cominciare l'esame.

Orario di ricevimento

Su appuntamento.

Sustainable Development Goals