UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

COURSE SYLLABUS

Stochastic Calculus and Finance

2425-1-F4001Q107

Obiettivi

L'insegnamento si propone di fornire allo studente le definizioni e le proprietà di base del moto browniano e risultati più importanti della teoria delle equazioni differenziali stocastiche. Verrà posta particolare enfasi sulle interazioni tra equazioni differenziali stocastiche e equazioni alle derivate parziali, e sulle applicazioni alla modellizzazione dei derivati finanziari.

Al termine del corso lo studente avrà acquisito le seguenti:

- conoscenze: linguaggio, definizioni ed enunciati dei risultati fondamentali sul moto browniano e sulle equazioni differenziali stocastiche;
- competenze: comprensione operativa delle principali tecniche dimostrative e dei principali modelli finanziari in cui la teoria viene applicata;
- abilità: capacità di applicare le nozioni teoriche per l'analisi di problemi e modelli.

Contenuti sintetici

- Introduzione ai processi stocastici a tempo continuo
- I processi di Levy e il moto Browniano
- L'integrale stocastico di Ito
- La formula di Ito
- Equazioni differenziali stocastiche
- L'operatore differenziale di Kolmogorov associato
- La PDE di Kolmogorov e la formula di Feynman-Kac
- Cenni sui mercati finanziari a tempo continuo
- La formula di Black e Scholes e il prezzaggio di opzioni europee

Programma esteso

Il moto browniano. Processi stocastici, spazio delle traiettorie, insiemi cilindrici, sigma-algebra prodotto. Legge di un processo stocastico e leggi finito-dimensionali. Vettori aleatori normali. Processi stocastici gaussiani. Definizione di moto browniano (MB). Costruzione del MB a partire dal Teorema di esistenza di Daniell-Kolmogorov e utilizzando il Teorema di continuità di Kolmogorov. Caratterizzazione del MB come processo gaussiano. Proprietà di invarianza del MB (riflessione spaziale, traslazione e riflessione temporale, riscalamento diffusivo, inversione temporale). MB rispetto a una filtrazione. Proprietà delle traiettorie del MB: non differenziabliltà. Variazione quadratica del MB. Legge del Logaritmo iterato. MB in dimensione d.

Processi di Lévy. Generalità sulle filtrazioni (F_t) indicizzate da un insieme continuo. Filtrazione naturale di un processo stocastico, processi adattati a una filtrazione. Continuità a destra e completezza per una filtrazione (definizione di F_t+), ampliamento standard. Processi di Lévy rispetto a una filtrazione. Esempi: processo di Poisson, processo di Poisson composto. Un processo di Lévy rispetto a una filtrazione (F_t) è indipendente da F_0. Legge 0-1 di Blumenthal. Tempi d'arresto e proprietà di Markov forte.

L'integrale di Ito. Modificazione e indistinguibilità per processi stocastici. Continuità e misurabilità per processi stocastici. La sigma algebra degli eventi antecedenti a un tempo d'arresto. Martingale a tempo continuo, esempi, modificazioni continue da destra, teorema d'arresto e disuguaglianza massimale. Processi progressivamente misurabili. L'integrale di Ito per i processi semplici. L'estensione a M^2 e a M^2_loc. Proprietà: località, esistenza della versione a traiettorie continue, proprietà di Martingala. Variazione quadratica. Somme di Riemann per l'integrale di Ito di processi a traiettorie continue. L'integrale di Wiener. Martingale locali.

La formula di Ito. La formula di Ito per il MB. Processi di Ito. Formula di Ito per processi di Ito generali. Applicazione della formula di Ito, Moto browniano geometrico e supermartingala esponenziale. La formula di Ito nel caso multidimensionale. Funzioni armoniche e problema di Dirichlet. Il Teorema di Girsanov. Esempio: il processo di Ornstein-Ühlenbeck. Il Teorema di rappresentazione delle martingale browniane.

Equazioni differenziali stocastiche. Esistenza forte e debole, unicità pathwise e in legge. Il Teorema di Yamada-Watanabe. Esistenza forte e unicità pathwise sotto ipotesi Lipschitz. Proprietà di flusso. Il semigruppo di Kolmogorov. L'equazione alle derivate parziali di Kolmogorov. La formula di Feynamn-Kac.

Applicazione ai mercati finanziari. Sottostanti, opzioni call e put, loro valore (payoff) e significato. Prezzaggio di un'opzione mediante copertura (hedging). Modello di mercato finanziario a tempo continuo basato su un titolo non rischioso (bond) e d titoli rischiosi (stocks) guidati da d MB indipendenti. Misura martingala locale equivalente. Strategie di investimento autofinanzianti e strategie ammissibili. Teorema di assenza di arbitraggio. Prezzaggio e copertura di opzioni europee. Il modello di Black&Scholes (unidimensionale, con tasso d'interesse, drift e volatilità costanti). Formula esplicita per il prezzo delle opzioni call. Un modello di mercato finanziario Markoviano con drift e volatilità dipendenti dal tempo e del sottostante. Formula di rappresentazione per il prezzo delle opzioni Europee e per la strategia di copertura.

Prerequisiti

Calcolo delle probabilità con teoria della misura, processi stocastici a tempo discreto, proprietà di base degli spazi di Hilbert e degli spazi L^p.

Modalità didattica

28 lezioni da 2 ore svolte in modalità erogativa in presenza

Materiale didattico

Dispense del docente

Libro **Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus** di Jean-François Le Gall, Springer series Graduate Texts in Mathematics (Volume 274, 2016)

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Primo semestre

Modalità di verifica del profitto e valutazione

Esame orale in cui viene valutata la conoscenza e la capacità dello studente di discutere criticamente le definizioni, gli enunciati, gli esempi e le dimostrazioni presentati durante il corso

Orario di ricevimento

Su appuntamento

Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÁ