UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

COURSE SYLLABUS

Higher Analysis

2425-1-F4001Q055

Obiettivi

Fornire un'introduzione alla teoria delle distribuzioni e agli spazi di Sobolev.

I risultati di apprendimento attesi comprendono:

- Conoscenze: la conoscenza e la comprensione delle definizioni e degli enunciati fondamentali, nonché delle strategie di dimostrazione basilari utilizzate nell'analisi moderna; la conoscenza e la comprensione di alcuni esempi chiave in cui si esplica la teoria.
- Capacità: la capacità di riconoscere il ruolo dei concetti e degli strumenti avanzati dell'analisi moderna introdotti (tra cui convoluzione, distribuzioni, spazi di Sobolev) in diversi ambiti della matematica pura e applicata (analisi numerica, fisica matematica, probabilità); la capacità di applicare tale bagaglio concettuale alla costruzione di esempi concreti e alla risoluzione di esercizi; la capacità di esporre, comunicare e argomentare in modo chiaro e preciso sia i contenuti teorici del corso, sia le loro applicazioni a situazioni specifiche, anche inerenti ad altri ambiti.

Contenuti sintetici

Nozioni basilari sugli spazi vettoriali topologici, con particolare riferimento agli spazi di funzioni test e di distribuzioni, studio delle proprietà fondamentali delle distribuzioni e di alcune loro applicazioni, spazi di Sobolev, problemi ellittici del secondo ordine.

Programma esteso

Capitolo 1. **Spazi vettoriali topologici**

Spazi vettoriali topologici, spazi di Frechet, dualità, limitatezza.

Capitolo 2. **Distribuzioni e operazioni con le distribuzioni**
Distribuzioni, distribuzioni temperate. Le principali operazioni con le distribuzioni e le distribuzioni temperate: derivazione, convoluzione, pull-back.

Capitolo 3. **Applicazioni**
Applicazioni alle soluzioni fondamentali di operatori differenziali classici.

Capitolo 4. **Spazi di Sobolev**
Motivazioni, definizioni e proprietà. Proprietà degli spazi di Sobolev: W?,?(?) è uno spazio di Banach, approssimazione con funzioni regolari, prodotto e composizione di funzioni in spazi di Sobolev. Spazi di Sobolev in dimensione 1: esistenza di un rappresentante continuo e teorema fondamentale del calcolo per funzioni W^{1},?(a, b). Teorema di Morrey. Disuguaglianza di Sobolev (Teorema di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg). Immersioni di Sobolev. Operatore di prolungamento e teorema del prolungamento per il semispazio e per domini limitati regolari. Approssimazione globale con funzioni lisce. Immersioni di Sobolev per domini di estensione. Immersioni per spazi di Sobolev di ordine superiore. Teorema di Rellich-Kondrachov. Esistenza dell'operatore di traccia ???:W^{1},?(?) ? L?(??) per 1 ? p < +? e ? semispazio o dominio limitato regolare. Cenni agli spazi di Sobolev di ordine frazionario, teorema di Gagliardo. Caratterizzazione di W^{1},??(?) tramite le tracce.

Capitolo 5. **Problemi ellittici del secondo ordine**
Lemma di Lax-Milgram. Problemi ellittici del secondo ordine: formulazione variazionale, esistenza di soluzioni. Disuguaglianza di Poincaré. Principio di Dirichlet. Problemi ellittici con condizioni al bordo di Neumann: formulazione variazionale e cenni agli spazi H(div,?). Disuguaglianza di Poincaré?-Wirtinger. Esistenza di soluzioni per il problema di Neumann sotto condizioni di compatibilità sui dati.

Prerequisiti

Calcolo in più variabili, algebra lineare, fondamenti di spazi di Hilbert e di spazi L?.

Modalità didattica

56 ore di lezione svolte in modalità erogativa, in presenza (8 cfu), con uso di lavagna.
Parte delle ore sarà dedicata all'illustrazione dei principali risultati della teoria; la rimanente parte sarà dedicata allo svolgimento di esercizi, in precedenza assegnati, di applicazione della teoria svolta.

Corso erogato in lingua italiana.

Materiale didattico

- Dispense disponibili sulla pagina e-learning del corso.
- A. Bressan. *Lecture Notes on Functional Analysis*. American Mathematical Society, 2013.
- H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- L.C. Evans. *Partial differential equations*, American Mathematical Society.

Periodo di erogazione dell'insegnamento

I semestre.

Modalità di verifica del profitto e valutazione

L'esame consiste in una prova scritta, tesa a verificare il livello delle conoscenze e la capacità di applicarle alla risoluzione di esercizi, l’autonomia di analisi e giudizio, nonché le capacità espositive acquisite dallo studente. La prova si articola in due parti: la prima parte contiene domande di carattere teorico (dimostrazioni di parte dei risultati discussi a lezione), mentre la seconda richiede di risolvere esercizi di applicazione della teoria, sovente di tipo simile a quelli illustrati durante le esercitazioni. Le due parti concorrono in egual misura alla determinazione del voto complessivo finale.

Orario di ricevimento

Su appuntamento.

Sustainable Development Goals