



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

## COURSE SYLLABUS

### Differential Geometry

2425-1-F4001Q071

---

#### Obiettivi

Lo scopo dell'insegnamento è introdurre lo studente alla teoria delle varietà riemanniane, ossia le varietà differenziali dotate di una metrica riemanniana, che consiste nell'assegnazione di un prodotto scalare euclideo a ogni spazio tangente, che vari in modo liscio con il punto base. Il corso si propone di familiarizzare lo studente con i concetti e le tecniche di base della geometria differenziale, partendo dal concetto fondante di connessione di Levi-Civita come generalizzazione dal contesto 'piatto' a quello 'curvo' della derivata ordinaria di un campo vettoriale. A partire dalla connessione di Levi Civita, verranno infatti introdotti gli invarianti di curvatura e le geodetiche. Un aspetto che ci si propone di illustrare è l'interazione tra le caratteristiche locali della struttura riemanniana, compendiate dalla curvatura, e la 'forma globale' della varietà stessa, ossia le sue caratteristiche topologiche.

Al termine del corso ci si attende che le studentesse e gli studenti abbiano acquisito:

1. le nozioni e i risultati basilari della Geometria Riemanniana classica.
2. le abilità di verifica, su esempi concreti, delle principali proprietà geometriche delle varietà Riemanniane.

È inoltre auspicabile che studenti e studentesse, al termine del corso, siano in grado di rielaborare quanto visto a lezione e di procedere in modo autonomo allo studio di aspetti avanzati della teoria completando i dettagli delle varie argomentazioni presenti.

#### Contenuti sintetici

Partendo dal problema dell'esistenza di una metrica Riemanniana su una generica varietà differenziale, si passerà alla nozione di derivazione di Levi-Civita, e di corrispondente trasporto parallelo, che consentirà di definire il concetto di curva geodetica come curva ad accelerazione nulla. Lo studio del tensore di curvatura di Riemann e delle sue tracce, anche concretizzato al caso delle superfici regolari nello spazio Euclideo, precederà la parte culminante del corso che, tempo permettendo, sarà dedicata ad alcuni aspetti globali quali la caratterizzazione della completezza in accordo al teorema di Hopf-Rinow e il legame tra il segno della curvatura e la topologia di una

varietà Riemanniana completa.

## **Programma esteso**

1. Cenno alle superfici regolari nello spazio Euclideo e alle loro curvature
2. Definizione ed esistenza delle metriche Riemanniane
3. Connessione di Levi-Civita e trasporto parallelo
4. Geodetiche e mappa esponenziale
5. Campi di Jacobi e punti coniugati
6. La struttura metrica intrinseca di una varietà Riemanniana
7. Le curvature di una varietà Riemanniana
8. Risultati globali
  - 8.1) Teoria globale delle geodetiche e completezza
  - 8.2) Il Teorema di Bonnet-Myers
  - 8.3) (tempo permettendo) Il Teorema di Cartan-Hadamard

## **Prerequisiti**

Calcolo differenziale in più variabili, nozioni di base sulle varietà differenziabili, algebra lineare e multilineare.

## **Modalità didattica**

56 ore svolte in modalità erogativa, in presenza (8 cfu).

Le lezioni si svolgono in italiano, e ove necessario, in inglese.

## **Materiale didattico**

### **Testi per la parte introduttiva sulla teoria delle superfici**

M. P. do Carmo, *Differential geometry of curves & surfaces*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.

M. Abate; F. Tovena, *Curves and surfaces*. Unitext, 55 Springer, Milan, 2012.

### **Testi di base sulla Geometria Riemanniana**

M. P. do Carmo *Riemannian geometry*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.

Lee, John M. *Introduction to Riemannian manifolds*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 176. Springer, Cham, 2018.

Ulteriore materiale didattico (come le note delle lezioni) verrà fornito durante il corso

### **Testi per approfondimenti**

S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine *Riemannian geometry*. Third edition. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

P. Petersen, *Riemannian Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 171. Springer, 2006.

T. Sakai, *Riemannian geometry*. Transl. Math. Monogr., 149 American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

### **Periodo di erogazione dell'insegnamento**

Secondo semestre

### **Modalità di verifica del profitto e valutazione**

La verifica dell'apprendimento avviene attraverso un esame orale tradizionale, durante il quale studentesse e studenti dovranno mostrare di aver acquisito le nozioni di base, le dimostrazioni dei principali teoremi, e la capacità di analisi e di calcolo su alcuni esempi concreti. A loro scelta, studentesse e studenti potranno cominciare l'esame con un seminario di approfondimento su un tema non trattato durante il corso.

### **Orario di ricevimento**

Su appuntamento

### **Sustainable Development Goals**

ISTRUZIONE DI QUALITÀ

---