



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

## SYLLABUS DEL CORSO

### Metodi e Modelli Stocastici

2425-1-F4001Q106

---

#### Obiettivi

L'insegnamento si propone di fornire una selezione di strumenti, concetti e modelli avanzati del calcolo delle probabilità e dei processi stocastici, dal punto di vista sia teorico che applicativo.

Al termine del corso lo studente avrà acquisito le seguenti:

- **conoscenze:** una selezione di risultati avanzati del calcolo della probabilità (grandi deviazioni), dei processi stocastici (catene di Markov a tempo continuo) e dei modelli stocastici (grafi aleatori);
- **competenze:** comprensione operativa del linguaggio probabilistico e di tecniche dimostrative avanzate (ad es. coupling);
- **abilità:** capacità di applicare le nozioni teoriche per la risoluzione di esercizi e l'analisi di problemi e modelli.

#### Contenuti sintetici

L'insegnamento si apre con alcuni risultati di **grandi deviazioni**, teoria che fornisce un quadro che permette di studiare eventi rari su scala esponenziale. Nella seconda parte del corso si approfondiscono le **catene di Markov a tempo discreto** e si introducono le **catene di Markov a tempo continuo**, dando particolare importanza al **Processo di Poisson**, essendo un esempio naturale di processo stocastico a tempo continuo con stati discreti. La terza parte del corso è dedicata ad approfondimenti sulle proprietà delle **passeggiate aleatorie**, un argomento fondamentale e ricco di spunti. L'ultima parte del corso si occupa della **teoria dei grafi aleatori**, un argomento di ricerca che sta ricevendo grande attenzione.

#### Programma esteso

## 1. Grandi deviazioni

- Il teorema di Cramér
- Entropia relativa e teorema di Sanov
- Il principio di grandi deviazioni
- Il principio di contrazione, il lemma di Varadhan, il Teorema di Gärtner-Ellis

## 2. Catene di Markov a tempo discreto e continuo

- Richiami (irriducibilità, classificazione degli stati)
- Proprietà di Markov forte
- Misure invarianti e convergenza all'equilibrio
- Semigruppì e generatori su spazi numerabili
- Processo di Poisson

## 3. Passeggiate aleatorie

- Passeggiate aleatorie semplici: Passeggiate aleatorie semplici monodimensionali, Teorema di Polya
- Passeggiate aleatorie su grafi: Problema di Dirichlet, Passeggiate aleatorie in ambiente aleatorio
- Ricorrenza e transienza per catene di Markov numerabili: Funzione di Liapunov e criteri di Foster-Lamperti

## 4. Grafi aleatori

- Il modello di Erdos-Renyi
- Soglie nel modello di Erdos-Renyi: Connettività e componente gigante

## Prerequisiti

Le conoscenze, competenze e abilità impartite negli insegnamenti di calcolo delle probabilità e processi stocastici (variabili aleatorie, martingale, legge condizionale) oltre che quelle impartite nei corsi di analisi matematica.

## Modalità didattica

Il corso consiste in 56 ore di insegnamento in presenza, basato su lezioni frontali, equivalenti a 8 CFU. È diviso in due componenti principali:

- **\*\*Teorico:** \*\*con un focus sulla presentazione di definizioni, risultati ed esempi rilevanti.
- **Pratico:** con un focus sulle competenze necessarie per applicare le conoscenze teoriche sia all'analisi dei modelli che alla soluzione degli esercizi.

Il corso sarà condotto in inglese.

## Materiale didattico

Appunti del corso

Testi di riferimento:

- F. den Hollander. *Large Deviations*, Fields Institute Monographs, vol. 14. AMS (2008).
- E. Pardoux. *Markov Processes and Applications: Algorithms, Networks, Genome and Finance*, Wiley (2008).
- Q. Berger, F. Caravenna, P. Dai Pra, *Probabilità: un primo corso attraverso esempi, modelli e applicazioni* (II edizione), Springer (2021).
- T. M. Liggett. *Continuous time Markov Processes (An Introduction)*, American Mathematical Society (2010).
- G. Last, M. Penrose. *Lectures on the Poisson Process*, Cambridge University Press (2017).
- S. Asmussen, *Applied Probability and Queues*, Springer (2003).
- R. Durrett. *Probability: theory and examples*. 5th edition (2019). The book can be downloaded for free from his personal webpage <https://services.math.duke.edu/~rtd/>.
- R. Lyons and Y. Peres, *Probability on Trees and Networks*, Cambridge University Press (2016). The book can be downloaded for free from Lyons homepage <https://rdlyons.pages.iu.edu/prbtree/book.pdf>.

## Periodo di erogazione dell'insegnamento

Secondo semestre

## Modalità di verifica del profitto e valutazione

L'esame si articola in due parti: una **consegna di esercizi** svolti in autonomia, che contribuisce per un sesto al voto finale, e una **prova orale**, che contribuisce per cinque sestimi al voto finale, espresso in trentesimi.

La **consegna di esercizi** consiste nella risoluzione di alcuni esercizi proposti durante il corso, che lo studente dovrà svolgere in autonomia e consegnare con un anticipo di almeno 5 giorni rispetto alla prova orale, e ha lo scopo di valutare la continuità dell'apprendimento e le abilità pratiche.

La **prova orale** consiste in un colloquio della durata indicativa di 30-60 minuti in cui vengono valutate la conoscenza delle definizioni, enunciati ed esempi presentati durante il corso e la competenza e abilità nell'esposizione di una selezione di argomenti con i dettagli delle dimostrazioni.

Ci saranno 6 appelli d'esame (due a giugno/luglio, uno a settembre, tre a gennaio/febbraio).

## Orario di ricevimento

Su appuntamento

## Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÀ

---