UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

COURSE SYLLABUS

Probability Theory

2526-3-E3501Q014

Obiettivi

1. Conoscenza e capacità di comprensione (DdD 1)
   Al termine del corso, lo studente conosce il linguaggio formale della teoria della probabilità, i principali concetti (spazio di probabilità, variabili aleatorie, distribuzioni, indipendenza, valore atteso, varianza), nonché i risultati fondamentali (legge dei grandi numeri, teorema del limite centrale, regole di calcolo delle probabilità).

2. Conoscenza e capacità di comprensione applicate (DdD 2)
   Lo studente è in grado di applicare i concetti e i teoremi appresi per risolvere problemi elementari di probabilità, analizzare semplici modelli stocastici, e affrontare esercizi standard sia in contesti teorici che applicati.

3. Autonomia di giudizio (DdD 3)
   Lo studente sviluppa capacità critiche nel riconoscere l'approccio probabilistico più adatto per modellare fenomeni semplici, valutando ipotesi, assunzioni e limiti dei modelli utilizzati. L'autonomia è favorita dalla discussione in aula e dalla redazione di elaborati o esercizi guidati.

4. Abilità comunicative (DdD 4)
   Lo studente acquisisce la capacità di comunicare in modo chiaro e rigoroso argomentazioni probabilistiche, sia in forma scritta che orale, utilizzando il linguaggio matematico appropriato, anche all'interno di lavori di gruppo o brevi presentazioni.

5. Capacità di apprendere (DdD 5)
   Il corso fornisce le basi metodologiche per lo studio autonomo della probabilità e delle sue applicazioni, favorendo la capacità di approfondire argomenti correlati (statistica, processi stocastici, machine learning) in percorsi successivi.

Contenuti sintetici

Nella prima parte viene presentata la teoria matematica del calcolo delle probabilità per descrivere fenomeni casuali mediante **spazi di probabilità**, secondo gli assiomi di N. Kolmogorov basati sulla teoria della misura. Vengono quindi studiate in dettaglio le **variabili aleatorie**, che costituiscono il "linguaggio operativo" del calcolo delle probabilità.

La seconda parte si apre con lo studio delle diverse **nozioni di convergenza** per successioni di variabili aleatorie. Vengono quindi presentati i **teoremi limite** fondamentali del calcolo delle probabilità: la *legge dei grandi numeri* e il *teorema limite centrale*. L'insegnamento si conclude con un'introduzione alle **catene di Markov**, una delle classi più semplici e allo stesso tempo importanti di processi stocastici.

Lungo tutto lo svolgimento dell'insegnamento, la presentazione della teoria è accompagnata dalla discussione di numerosi **modelli e applicazioni**.

Programma esteso

1. *Spazi di probabilità*

- Introduzione alla probabilità
- Assiomi della probabilità
- Proprietà di base della probabilità
- Calcolo combinatorio e spazi uniformi
- Probabilità condizionale
- Indipendenza di eventi

2. *Variabili aleatorie*

- Richiami di teoria della misura
- Distribuzioni notevoli discrete e assolutamente continue
- Variabili aleatorie
- Leggi marginali e legge congiunta
- Indipendenza di variabili aleatorie
- Trasformazioni di variabili aleatorie
- Valore medio, momenti, varianza e covarianza
- Spazi L? e disuguaglianze
- Correlazione e regressione lineare (cenni)

3. *Convergenza e teoremi limite*

- Richiami sui teoremi di convergenza
- Lemma di Borel-Cantelli
- Legge debole e forte dei grandi numeri
- Nozioni di convergenza per variabili aleatorie
- Convergenza debole di probabilità
- Legge dei piccoli numeri
- Teorema limite centrale e approssimazione normale
- Legge 0-1 di Kolmogorov

4. *Catene di Markov*

- Introduzione ai processi stocastici

- Catene di Markov e proprietà di base
- Stati ricorrenti e transitori
- Misure invarianti e reversibili
- Teoremi di convergenza (cenni)
- Probabilità di assorbimento (cenni)
- Passeggiate aleatorie su grafi (cenni)

5. *Modelli e applicazioni* (presentati in parallelo alla teoria, tempo permettendo)

- Paradossi classici (compleanni, Monty-Hall, Borel, Bertrand)
- Permutazioni aleatorie e punti fissi
- Concentrazione del volume in alte dimensioni
- Il teorema di approssimazione di Weierstrass
- Simulazione di variabili aleatorie
- Passeggiata aleatoria semplice
- Rovina del giocatore
- L'algoritmo PageRank

Prerequisiti

Le conoscenze, competenze e abilità impartite negli insegnamenti dei primi due anni, in particolare *Algebra Lineare*, *Analisi 1 e 2*, *Teoria della Misura*.

Modalità didattica

L'insegnamento si articola in lezioni ed esercitazioni frontali:

- nelle lezioni teoriche, svolte in presenza in modalità erogativa (DE), (10 cfu) si fornisce la conoscenza di definizioni, risultati ed esempi rilevanti, in parallelo alle competenze relative alla loro comprensione;
- nelle esercitazioni (2 cfu), svolte in presenza in modalità interattiva (DI), si forniscono abilità necessarie per applicare le conoscenze e competenze teoriche alla risoluzione di esercizi.

L'insegnamento è erogato in lingua italiana.

Materiale didattico

Libri di riferimento

- F. Caravenna, P. Dai Pra. *Probabilità. Un'introduzione attraverso modelli e applicazioni.* Seconda Edizione (2021), Springer-Verlag Italia.
- D. F. Anderson, T. Seppäläinen, B. Valkó. *Introduction to Probability*. Cambridge University Press (2018).
- J. Jacod, P. Protter. *Probability Essentials*. 2nd Edition, Springer (2003).
- P. Baldi. *Calcolo delle Probabilità*. McGraw-Hill (2007, 2011).

Altro materiale didattico (disponibile sulla pagina e-learning)

- Dispense del docente su argomenti specifici
- Fogli di esercizi settimanali (con soluzioni dettagliate)
- Testi delle prove scritte degli anni passati (con soluzioni dettagliate)
- Elenco delle dimostrazioni per la prova orale

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Terzo anno, primo semestre.

Modalità di verifica del profitto e valutazione

Prova scritta - o prove parziali - e prova orale, con le modalità descritte qui sotto. Gli aspetti valutati in ciascuna prova sono l'esattezza delle risposte, la creatività, la precisione, la chiarezza espositiva.

Ci saranno 6 appelli d'esame.

- La *prova scritta* ha una durata di tre ore e riceve una valutazione in trentesimi. Nella prova vengono valutate sia conoscenze e competenze teoriche (definizioni, esempi e controesempi) sia abilità pratiche (soluzione di esercizi). La prova scritta risulta superata col punteggio minimo di 15/30 e permette di accedere alla prova orale.
- A metà e alla fine dell'insegnamento sono previste due *prove parziali*, con struttura analoga alla prova scritta, della durata di un'ora e mezza ciascuna, valutate in trentesimi. Il superamento di *entrambe* le prove parziali col punteggio minimo di 15/30 equivale al superamento della prova scritta (con la media dei punteggi ottenuti) e permette di accedere alla prova orale.
- La *prova orale* ha una durata di 30-45 minuti e riceve una valutazione in trentesimi. Può essere sostenuta in un appello qualsiasi dell'anno accademico (dopo avere superato la prova scritta). Nella prova viene valutata la conoscenza di una selezione di dimostrazioni e la conoscenza operativa delle nozioni presentate. La prova orale risulta superata col punteggio minimo di 15/30.
- La valutazione finale risulta dalla media delle valutazioni della prova scritta e della prova orale. L'esame risulta superato col punteggio minimo di 18/30.

Esonero dalla prova orale. Chi supera la prova scritta con un punteggio compreso tra 20/30 e 27/30 può rinunciare a sostenere la prova orale, registrando il voto ottenuto nella prova scritta; con un punteggio superiore a 27/30 è ancora possibile rinunciare a sostenere la prova orale, ma in questo caso il voto registrato sarà di 27/30; infine, con un punteggio inferiore a 20/30, è necessario sostenere la prova orale.

Orario di ricevimento

Su appuntamento.

Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÁ