UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

SYLLABUS DEL CORSO

Analisi Complessa

2526-3-E3501Q057

Obiettivi

Obiettivi formativi (Descrittori di Dublino)

1. Conoscenza e capacità di comprensione
   Lo studente acquisirà una conoscenza chiara e sistematica dei principali concetti dell'analisi complessa in una variabile: funzioni olomorfe, teorema di Cauchy e sue applicazioni, singolarità isolate e zeri, mappe conformi, funzioni armoniche, serie di potenze e prodotti infiniti, funzione Gamma e funzione Zeta.

2. Capacità di applicare conoscenza e comprensione
   Lo studente sarà in grado di applicare i metodi appresi alla risoluzione di esercizi e problemi, anche in contesti applicativi semplici, mostrando padronanza delle tecniche di calcolo e comprensione delle strutture matematiche di base.

3. Autonomia di giudizio
   Lo studente svilupperà la capacità di comprendere e valutare criticamente definizioni, enunciati e dimostrazioni, riconoscendo gli strumenti concettuali più adatti per l'analisi e la risoluzione dei problemi proposti.

4. Abilità comunicative
   Lo studente saprà esporre i concetti fondamentali del corso con chiarezza e rigore, utilizzando correttamente il linguaggio matematico.

5. Capacità di apprendimento
   Lo studente svilupperà le competenze necessarie per proseguire in autonomia lo studio dell'analisi complessa e delle discipline affini, con capacità di consultazione di testi scientifici e risorse didattiche adeguate.

Contenuti sintetici

Si tratta di un corso di base sulle funzioni di una variabile complessa. Contiene, tra l'altro, nozioni di base relative alle funzioni olomorfe e alle mappe conformi, al teorema di Cauchy e alle sue applicazioni, alla teoria delle singolarità isolate e degli zeri di funzioni olomorfe. Conclude il corso una introduzioni ad alcune importanti funzioni speciali.

Programma esteso

Parte 1. Preliminari. Funzioni olomorfe: definizione ed esempi. Funzioni intere. Condizioni di Cauchy–Riemann. Funzioni armoniche. Serie di potenze. Formula di Hadamard per il raggio di convergenza di una serie di potenze. Serie di McLaurin per le principali funzioni elementari. Integrazione lungo curve. Curve parametriche, curve parametriche regolari a pezzi. Orientazione. Integrazione lungo curve e sue proprietà.

Parte 2. Il teorema di Cauchy e applicazioni. Il lemma di Goursat. Esistenza di primitive locali e il teorema di Cauchy per un disco. Esistenza di primitive di una funzione olomorfa in un disco. Teorema di Cauchy in un disco. Calcolo di alcuni integrali. Esempi di calcolo di integrali utilizzando il teorema di Cauchy. Formula integrale di Cauchy. Teorema del massimo modulo e Lemma di Schwarz. Disuguaglianze di Cauchy. Le funzioni olomorfe sono localmente somma di serie di potenze. Teorema di Liouville. Teorema fondamentale dell'algebra. Principio di identità delle funzioni olomorfe e prolungamento analitico. Ulteriori applicazioni. Il teorema di Morera. Convergenza uniforme sui compatti di successioni di funzioni olomorfe. Funzioni olomorfe definite mediante integrali. Il principio di simmetria e il principio di riflessione di Schwarz. Il problema dell'approssimazione mediante polinomi e il teorema di Runge.

Parte 3. Funzioni meromorfe e il logaritmo. Zeri e poli. Forma di una funzione olomorfa in un intorno di un suo zero. Molteplicità di uno zero, zeri semplici. Polo di una funzione olomorfa. Forma di una funzione olomorfa in un intorno di un suo polo. Ordine del polo, parte principale e residuo. Formula per il residuo di un polo di ordine n. Formula dei residui. Il teorema dei residui. Esempi di applicazione del teorema dei residui. Singolarità e funzioni meromorfe. Singolarità rimovibili. Il teorema di Riemann sulle singolarità rimovibili. Caratterizzazione dei poli. Singolarità essenziali. Comportamento di una funzione in un intorno di una singolarità essenziale: il teorema di Casorati–Weierstrass. Funzioni meromorfe in una regione. Singolarità all'infinito. Caratterizzazione delle funzioni meromorfe nel piano complesso esteso. Il principio dell'argomento e applicazioni. Il principio dell'argomento. Il teorema di Rouché. Teorema della mappa aperta. Il logaritmo complesso. Esistenza del logaritmo in una regione semplicemente connessa. Determinazione principale del logaritmo. Serie di potenze del logaritmo. Esistenza del logaritmo di una funzione che non si annulla in una regione semplicemente connessa.

Parte 4. Funzioni intere. La formula di Jensen. Teorema di Jensen. Funzioni di ordine finito. Ordine di una funzione intera. Relazione tra ordine di una funzione intera e suoi zeri. Prodotti infiniti. Definizione di convergenza di un prodotto infinito. Condizione sufficiente di convergenza. Convergenza di prodotti di funzioni olomorfe. La formula prodotto della funzione seno. Prodotti infiniti di Weierstrass. Esistenza di una funzione intera con zeri prescritti. Il teorema di fattorizzazione di Hadamard. Fattorizzazione di funzioni intere di ordine finito.

Parte 5. La funzione Gamma di Eulero e sue proprietà. La funzione zeta di Riemann: suo prolungamento analitico e connessione con il teorema dei numeri primi

Prerequisiti

I prerequisiti richiesti sono trattati nei corsi di Analisi I, Analisi II, Algebra lineare e Teoria della misura della Laurea triennale in Matematica e sono i seguenti: calcolo differenziale e integrale per funzioni di una e più variabili reali, elementi di base di algebra lineare, la teoria dell'integrale di Lebesgue, con particolare riferimento ai teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale e al Teorema di Fubini-Tonelli.

Gli studenti non in possesso dei requisiti sopra elencati sono invitati a contattare tramite posta elettronica il docente, che provvederà a dare indicazioni bibliografiche utili a colmare le lacune e a fornire eventuale ulteriore supporto.

Modalità didattica

48 ore di lezione svolte in modalità erogativa, in presenza (6 cfu), con uso di lavagna.
Corso erogato in lingua italiana.

Materiale didattico

Ci sono molti ottimi testi di Analisi complessa.

Il docente segnala i classici :

Ahlfors: "Complex Analysis", McGraw-Hill

Nevanlinna, Patero: "Introduction to Complex Analysis", Chelsea Publishing

e, i più recenti:

Stein and Shakarchi, “Complex analysis”, Princeton University Press

Ullrich: "Complex made simple", American Mathematical Society.

Il docente metterà a disposizione, sul sito e-learning del corso, propri appunti ed esercizi.

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Primo semestre

Modalità di verifica del profitto e valutazione

Non sono previste prove in itinere. L'esame consiste di una
prova scritta e di una prova orale. La prova scritta, contenente esercizi e problemi di applicazione della teoria, se superata,da accesso alla prova orale nella quale lo studente darà prova della conoscenza degli aspetti fondamentali della teoria, degli enunciati e delle dimostrazioni dei principali teoremi.

Supera l'esame chi dimostra di possedere le conoscenze teoriche richieste e le abilità necessarie a svolgere gli esercizi proposti.

La valutazione terrà conto dell'esattezza delle risposte, della chiarezza espositiva e della proprietà di linguaggio matematico utilizzato.

Orario di ricevimento

Per appuntamento (richiesto mediante e-mail).

Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÁ