UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

COURSE SYLLABUS

Quantitative Methods for Insurance

2526-2-F1601M065

Learning objectives

The central theme of the course is the set of mathematical and statistical methods used to answer questions such as determining the premium of a life insurance policy or calculating the amount needed to secure a supplementary pension. These are fundamental questions both for the investor purchasing protection (which often has features very similar to those of an investment), and for the insurance companies selling it, which—while collecting premiums—must monitor their exposure to various sources of risk in a continuously evolving regulatory environment.

The course consists of two modules: Actuarial Mathematics (taught by Prof. Fabio Bellini) and Statistics for Insurance (taught by an industry professional). We recommend including this course in your study plan alongside Insurance Risks, held in the second semester, which focuses more on methods for non-life insurance.

In summary, we can ex ante outline the following learning objectives:

- Understand the fundamental concepts of modeling human life duration and use them to calculate the actuarial value and premium of the main types of life contingencies
- Use R to download, visualize, and model mortality data, as well as to perform actuarial calculations and simulations
- Understand the quantitative aspects of insurance regulation, with particular focus on the Solvency II framework as it applies to life insurance

Contents

1) The modelling of human lifetime duration

2) Formulas for the calculation of actuarial present values and premium payment schemes in life contingencies

3) The mathematical reserve and the profit decomposition in traditional actuarial mathematics

4) Introduction to Solvency II and to risk management in insurance companies

5) Health insurance policies and an introduction to multi-state models

6) Reinsurance contracts and an introduction to pricing methodologies

Detailed program

1) La modellizzazione della durata della vita umana

Tavole di mortalità, probabilità di vita e di morte, probabilità di morte differite. Identità relative a probabilità di vita e di morte. Altre misure monoannuali di mortalità: tasso di mortalità centrale e mortality odds. Il modello probabilistico: la variabile casuale vita residua completa e incompleta, funzione di sopravvivenza e funzione di sopravvivenza condizionata. Calcolo della aspettativa di vita completa e incompleta. Forza di mortalità e leggi di mortalità: Gompertz, Makeham e Heligman e Pollard. Etereogeneità e introduzione all'aggravamento dei rischi. Introduzione alla mortalità stocastica. Il modello di Lee-Carter.

Riferimenti:

- **OP** Capitolo 3
- **PDHO** Capitolo 5, sezioni 5.1 e 5.2
- slides Bellini mortalità statica
- slides Contini rischi aggravati

Cose da saper fare in R:

- scaricare, importare e visualizzare di tavole di mortalità dal sito ISTAT e dallo Human Mortality Database
- creare oggetti lifetable del package *lifecontingencies* e utilizzare le funzioni pxt, qxt, exn, rLife.
- stima, visualizzazione degli output e dei residui, previsione della mortalità con il modello di Lee-Carter e il package *demography*
- costruzione di una tavola di mortalità a partire da una legge di mortalità come nell'esempio di Heligman e Pollard con il package *MortalityLaws*

2) Formule per il calcolo del valore attuariale e schemi di pagamento di premi di *life contingencies*

Definizione di valore attuariale di una *life contingency*. Principali tipi di prestazioni nel ramo vita: capitale differito, temporanea caso morte, copertura a vita intera, rendite vitalizie temporanee e perpetue. Formule per il calcolo del valore attuariale e notazioni attuariali standard: nEx, nAx, Ax, nax, ax. Formule ricorsive per i valori attuariali. Determinazione del premio equo: la condizione di equilibrio attuariale. Schemi di pagamento dei premi: premio unico iniziale, premi annui costanti, premi naturali, premi unici ricorrenti.
.

- **OP** Capitolo 4
- Slides Bellini valori attuariali

Cose da saper fare in R:

- creare oggetti di tipo *lifetable* e *actuarialtable* nel package *lifecontingencies*, sia partendo da dati empirici

che da leggi di mortalità
- calcolare valori attuali e montanti con presentValue, annuity e accumulatedValue
- calcolare valori attuariali e premi equi con Axn, Exn, axn.

3) La riserva matematica e la decomposizione dell'utile nella matematica attuariale tradizionale

Definizione di riserva matematica netta prospettiva come differenza tra il valore attuariale delle prestazioni ancora da pagare e quello dei premi ancora da prendere. Andamento temporale della riserva nel caso di term insurance, pure endowment ed endowment insurance. Equazione di Fouret per una Endowment insurance. Decomposizione del premio in premio di rischio e premio di risparmio. Formula di contribuzione di Homans.

Riferimenti:

- **OP** Capitolo 5, Sezioni 5.1, 5.2, 5.3.1,5.3.2, 5.3.3, 5.4.1, 5.4.2, 5.4.3, 5.5.1, 5.5.2

Cose da saper fare in R:

- costruzione di una funzione in R per il calcolo della evoluzione temporale della riserva di una endowment insurance applicando la definizione
- costruzione di una funzione in R per il calcolo della evoluzione temporale della riserva di una endowment insurance usando la equazione di Fouret
- costruzione di una funzione in R per il calcolo di premi naturali, premi al rischio e premi di risparmio di una endowment insurance

4) Introduzione a Solvency II e al risk management nelle compagnie di assicurazione

Principi base di Solvency II. Parole chiave: Best estimate, Risk Margin, Solvency Capital Requirement, Own Funds. Approcci al calcolo dell'SCR: standard formula, undertaking specific parameters, internal models.

Riferimenti:

- **CV** Capitolo 7

5) Polizze salute e introduzione ai modelli multi-stato

Tipologie di polizze e di coperture salute. Introduzione al modello di rischio collettivo (non richiesto all'esame, lo approfondirete in Rischi Asscicurativi). I modelli multistato.

Riferimenti:

- Slides Contini Health Insurance

Cose da saper fare in R:

- simulazione e pricing di polizze multi-stato con il package *markovchain*

6) I contratti di riassicurazione e introduzione alle metodologie di pricing

I contratti riassicurativi. Metodologie di pricing (non richiesto all'esame, lo approfondirete in Rischi Assicurativi)

- Slides Contini Riassicurazione

7) Concetti base di R

- Concetti base sull'ambiente di lavoro in RStudio

- tipologie di dati fondamentali: vettori, liste, dataframe
- NA, null e NaN
- concetti base sulla visualizzazione dati in R base: hist e plot
- simulazione di numeri casuali
- costruzione di cicli
- costruzione di funzioni
- oggetti di tipo lifetable e actuarialtable e funzioni associate

Prerequisites

Basic knowledge of general mathematics (derivatives and integrals), financial mathematics (annuities and present values), and probability (random variables).

Teaching methods

Lectures, bring-your-own-device R programming

Assessment methods

The examination for the two modules, Actuarial Mathematics and Statistics for Insurance, will take place in a single session consisting of an oral exam and the discussion of a project developed in R.

Textbooks and Reading Materials

Testi di riferimento per l'esame (vedere le sezioni nel programma dettagliato)

- **OP** Olivieri, A., Pitacco, E., Introduction to Insurance Mathematics
- **PDHO** Pitacco, E., Denuit, M., Haberman, S., Olivieri, A. Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business
- **CV** Cesari, R., Valerio A. Risk Management e imprese di assicurazione

Testi di approfondimento

- **D** Davies, T. The book of R: a first course in programming and statistics
- **P1** Pitacco, E. Health insurance: basic actuarial models
- **P2** Pitacco, E. ERM and QRM in Life Insurance
- **AI** Wutrich et al. AI tools for actuaries

Semester

Primo semestre

Teaching language

Italiano

Sustainable Development Goals