



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

## SYLLABUS DEL CORSO

### Probabilità Applicata

2526-1-F8206B003-F8206B003-1

---

#### Obiettivi formativi

Il corso di Probabilità applicata intende fornire agli studenti conoscenze avanzate di probabilità necessarie per comprendere la metodologia statistica e saperla applicare in ambito economico, aziendale e finanziario.

In termini di conoscenza e capacità di comprensione, il corso introduce i concetti fondamentali del calcolo delle probabilità, con particolare attenzione all'assiomatizzazione di Kolmogorov. Verranno approfonditi i concetti di vettori Gaussiani, variabili e vettori aleatori. Verranno studiate le diverse modalità di convergenza di variabili e vettori aleatori, compresi i teoremi limite di successioni di variabili aleatorie.

Relativamente alla capacità di applicare conoscenza e comprensione, gli studenti impareranno a determinare la legge di vettori aleatori (discreti e continui). Riusciranno a studiare la convergenza di successioni di variabili aleatorie tramite avanzati strumenti probabilistici, quali la funzione di ripartizione, la funzione generatrice dei momenti e la funzione caratteristica. Infine gli studenti riusciranno a trattare vettori Gaussiani.

Per quanto riguarda l'autonomia di giudizio, gli studenti saranno in grado di valutare criticamente i risultati ottenuti tramite analisi probabilistiche, applicando correttamente i teoremi trattati per studiare la convergenza o la legge di probabilità di vettori aleatori.

In merito alle abilità comunicative, il corso consentirà agli studenti di esporre in modo chiaro e rigoroso concetti complessi della teoria della probabilità, attraverso l'uso di un linguaggio matematico appropriato che poggi sulle sue basi sulla teoria della misura.

Infine, relativamente alle capacità di apprendimento, gli studenti saranno in grado di utilizzare gli strumenti probabilistici per comprendere: le metodologie avanzate di analisi statistica multivariata, i metodi avanzati di inferenza statistica in ambito classico e bayesiano, i modelli di statistica spaziale, i modelli per dati di elevata dimensione ed i piani di campionamento complessi.

## Contenuti sintetici

Dopo un'introduzione alle diverse definizioni di probabilità, verranno presentate le basi della teoria assiomatica di Kolmogorov su cui si poggia la probabilità moderna. Verranno analizzate le proprietà elementari della probabilità, tra cui la continuità, sub-additività, monotonia, inoltre verranno presentati i Lemmi di Borel-Cantelli.

Ampio spazio verrà dato ai vettori aleatori negli spazi euclidei  $n$ -dimensionali ed alle trasformazioni di vettori aleatori. Il concetto di valore atteso condizionato sarà definito ed analizzato in dettaglio, con qualche cenno alla teoria della misura.

Nella seconda parte del corso, verranno studiati i quattro concetti di convergenza di variabili aleatorie: in distribuzione, in probabilità, quasi certa e in media  $r$ -esima. Saranno quindi presentati e dimostrati i teoremi limite del calcolo delle probabilità e le loro conseguenze.

Infine saranno definiti ed analizzati i vettori Gaussiani attraverso la funzione caratteristica.

Il corso sarà affiancato da molti esercizi pratici.

## Programma esteso

1. **INTRODUZIONE.** Cenni storici al calcolo delle probabilità: i problemi classici. Definizioni della probabilità: classica, soggettiva e frequentista. Il principio di coerenza di Bruno de Finetti e le sue conseguenze. L'assiomatizzazione della probabilità di Kolmogorov.
2. **ASSIMI DELLA PROBABILITA' E CONSEGUENZE.** La definizione assiomatica di probabilità. Le implicazioni della definizione: additività, monotonia, disuguaglianza di Boole, continuità della probabilità. I lemmi di Borel-Cantelli. Le probabilità condizionate e l'indipendenza di eventi.
3. **VARIABILI ALEATORIE E VETTORI ALEATORI.** Definizione di variabile aleatorie e vettore aleatorio (discreti e continui). Il concetto di distribuzione e la funzione di ripartizione. Relazioni tra variabili aleatorie: condizionamento ed indipendenza. Trasformazioni di vettori aleatori: il teorema del diffeomorfismo.
4. **VALORI ATTESI.** Richiami su speranza matematica, varianza e covarianza. La disuguaglianza di Markov. Valore atteso condizionato e sue proprietà.
5. **CENNI DI TEORIA DELLA MISURA.** La probabilità come misura. Le variabili aleatorie nella teoria della misura. L'integrale alla Lebesgue ed il valore atteso. Definizione generale di valore atteso condizionato data una sigma-algebra (cenni).
6. **CONVERGENZA DI VARIABILI ALEATORIE.** La convergenza delle variabili aleatorie: in distribuzione, in probabilità, in media  $r$ -esima e quasi certa. Le relazioni tra le diverse convergenze. Legge debole dei grandi numeri, cenni alla legge forte di Kolmogorov.
7. **FUNZIONI GENERATRICI.** Funzione caratteristica e generatrice dei momenti. Il teorema di continuità di Lévy. Il teorema centrale di convergenza. Il metodo delta.
8. **VETTORI GAUSSIANI.** Funzione caratteristica per vettori. I vettori Gaussiani.

## Prerequisiti

Per affrontare il corso sono necessarie le conoscenze dei corsi di Analisi Matematica (I e II) e del Corso di Calcolo delle Probabilità della laurea triennale.

## Metodi didattici

Lezioni frontali. Le lezioni sono di carattere tradizionale e si svolgeranno in presenza in modalità erogativa, durante le lezioni verranno svolti anche numerosi esercizi a supporto della teoria.

## **Modalità di verifica dell'apprendimento**

L'esame è costituito da una prova scritta, l'orale è facoltativo. La prova scritta è costituita da esercizi e da alcune domande di teoria. Gli esercizi mirano ad accertare la comprensione degli argomenti trattati e la capacità dello studente di applicare i concetti della probabilità. Le domande di teoria servono a verificare la conoscenza e la comprensione dei concetti della probabilità. Le domande di teoria possono riguardare anche dimostrazioni svolte durante il corso.

L'orale è facoltativo e può essere chiesto sia dallo studente che dal docente. L'esame orale verte su tutto il programma del corso e deve essere svolto pochi giorni dopo lo scritto, in base alle disponibilità del docente. In tal caso il voto finale è una media della prova scritta e della prova orale.

Durante lo scritto è consentito l'uso della calcolatrice scientifica, ma non è ammesso l'uso di appunti, libri e strumenti tecnologici.

## **Testi di riferimento**

Testo consigliato (con esercizi):

- G. Dall'Aglio (2003). Calcolo delle Probabilità. Zanichelli, terza edizione.

Testi di consultazione:

- Grimmett G. and Stirzaker D. (2001). Probability and random processes. Oxford University Press.

Eserciziari:

- Epifani, I. e Ladelli, L. (2021). Esercizi di probabilità per l'ingegneria, le scienze e l'economia. Edizioni La Dotta.
- Grimmett G. and Stirzaker D. (2000). One Thousand Exercises in Probability: Third Edition. Oxford University Press.

## **Periodo di erogazione dell'insegnamento**

Primo semestre, primo ciclo.

## **Lingua di insegnamento**

Italiano.

## Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÀ

---