

## COURSE SYLLABUS

### Geometric Analysis

2526-1-F4002Q002

---

#### Obiettivi

Il corso si propone di fornire un'introduzione all'analisi su spazi metrici, con particolare enfasi sugli aspetti geometrici e sullo sviluppo di un calcolo differenziale al primo ordine in contesti metrici generali.

I risultati di apprendimento attesi, descritti secondo i Descrittori di Dublino, sono

**1. Conoscenza e capacità di comprensione**

Al termine del corso, lo studente avrà acquisito una comprensione approfondita delle definizioni fondamentali, dei principali risultati teorici e di alcune strategie dimostrative relative all'analisi su spazi metrici. Conoscerà classi significative di spazi (metrici di lunghezza, intrinseci, di misura) e i contesti matematici in cui essi emergono.

**2. Conoscenza e capacità di comprensione applicate**

Lo studente sarà in grado di applicare metodi dell'analisi e della geometria a spazi metrici non standard, identificandone proprietà geometriche e analitiche rilevanti. Saprà introdurre e utilizzare strumenti di calcolo differenziale di primo ordine in tali ambienti.

**3. Autonomia di giudizio**

Lo studente svilupperà la capacità di analizzare criticamente le ipotesi dei risultati studiati, valutare l'applicabilità degli strumenti teorici in contesti differenti e riconoscere collegamenti concettuali tra vari argomenti del corso.

**4. Abilità comunicative**

Lo studente sarà in grado di esporre con chiarezza e rigore contenuti teorici, esempi ed elaborazioni proprie, utilizzando in modo appropriato il linguaggio matematico e argomentativo sia in forma scritta che orale.

**5. Capacità di apprendimento**

Lo studente acquisirà autonomia nello studio di testi avanzati, nonché gli strumenti concettuali necessari

per affrontare ulteriori approfondimenti nell'ambito dell'analisi geometrica e discipline affini, anche in vista di attività di ricerca.

## **Contenuti sintetici**

Nozioni basilari e aspetti geometrici (tra cui la curvatura) degli spazi metrici di lunghezza.

Elementi di analisi e di calcolo differenziale al primo ordine su spazi metrici di misura.

## **Programma esteso**

### **Parte I. Spazi metrici (intrinseci) e curvatura.**

- Spazi metrici: definizione, esempi, topologia; misura e dimensione di Hausdorff.
- Spazi di lunghezza, metriche intrinseche, geodetiche, lunghezza e velocità; costruzioni e esempi.
- Spazi di curvatura limitata: alcune definizioni equivalenti di curvatura limitata (dall'alto o dal basso) per uno spazio metrico; angoli; costruzioni e esempi.
- Convergenza di spazi metrici: convergenza uniforme; definizioni e proprietà della distanza di Gromov-Hausdorff.
- Panoramica sulle proprietà degli spazi metrici a curvatura positiva: crescita dei volumi, dimensione di Hausdorff; globalizzazione; esempi (coni, superfici convesse,...); cenni a risultati di compattezza.

### **Parte II. Analisi e calcolo differenziale su spazi metrici di misura**

- Spazi metrici di misura; proprietà del raddoppio; lemmi di ricoprimento: teorema di Vitali, teorema di Lebesgue.
- Funzione massimale di Hardy-Littlewood: risultati di limitatezza.
- Richiami su spazi di Sobolev in  $\mathbb{R}^n$ ; immersioni di Sobolev; disuguaglianze di Poincaré.
- Spazi di Sobolev su spazi metrici: approccio via la funzione massimale; funzioni lipschitziane: teoremi di estensione e di densità.
- Gradiente superiore, moduli di una famiglia di curve, capacità; spazi di Sobolev newtoniani su spazi metrici: definizioni e proprietà.
- Cenni a equazioni differenziali su spazi metrici: disuguaglianze di Poincaré su spazi metrici; funzioni armoniche e problemi di Dirichlet.

## **Prerequisiti**

Calcolo in più variabili; fondamenti di teoria della misura e della teoria degli spazi  $L_p$ .

Una conoscenza di base degli spazi di Sobolev in  $\mathbb{R}^n$  può aiutare nella fruizione della seconda parte del corso, ma non è strettamente necessaria.

## Modalità didattica

Si utilizza un approccio didattico ibrido che combina didattica frontale in modalità ergativa (DE) e didattica interattiva (DI). La DE costituisce la parte principale del corso, e include la presentazione e spiegazione dettagliata dei contenuti teorici e di alcuni esempi. La DI prevede interventi attivi degli studenti tramite risposte a esercizi e problemi, brevi interventi e discussioni collettive. Non è possibile stabilire precisamente a priori il numero di ore dedicate alla DE e alla DI, poiché le modalità si intrecciano in modo dinamico per adattarsi alle esigenze del corso e favorire un apprendimento partecipativo e integrato, combinando teoria e pratica.

Le lezioni (56 ore, 8 CFU) sono in presenza e si svolgono in italiano, e ove necessario, in inglese.

Degli esercizi saranno assegnati mano a mano. La loro soluzione potrà essere discussa, oltre che in classe, anche durante i ricevimenti su richiesta degli studenti.

## Materiale didattico

I principali testi di riferimento sono i seguenti.

Per la prima parte del corso:

- D. Burago, Y. Burago, and S. Ivanov. *A course in metric geometry*, volume 33 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001

Per la seconda parte del corso:

- J. Heinonen. *Lectures on analysis on metric spaces*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001
- A. Björn, J. Björn, *Nonlinear potential theory on metric spaces*. EMS Tracts in Mathematics, 17. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2011. xii+403 pp.

Saranno messe a disposizione degli studenti delle note redatte dal docente che contengono i concetti, i risultati, le dimostrazioni e buona parte degli esempi trattati a lezione.

## Periodo di erogazione dell'insegnamento

Il semestre.

## Modalità di verifica del profitto e valutazione

L'esame consiste in una prova orale conclusiva con voto in trentesimi. Non sono previste prove in itinere.

L'esame orale sarà principalmente un colloquio sugli argomenti svolti a lezione, teso a verificare il livello delle conoscenze, l'autonomia di analisi e giudizio e le capacità espositive acquisite dallo studente. Qualche facile esercizio o esempio non trattato a lezione potrà essere discusso.

Il corso è diviso in due parti principali (si veda la voce "programma esteso" per maggiori dettagli).

Per l'esame è possibile concentrarsi maggiormente su una delle due parti (a scelta) da conoscere in dettaglio, e

dell'altra parte conoscere più a grandi linee i concetti, gli oggetti e le definizioni, ma non necessariamente gli enunciati rigorosi dei risultati e le dimostrazioni.

E' anche possibile scegliere un breve argomento di approfondimento, concordato con, ed eventualmente (ma non necessariamente) proposto dal, docente con cui cominciare l'esame.

## **Orario di ricevimento**

Su appuntamento.

## **Sustainable Development Goals**

ISTRUZIONE DI QUALITÀ

---