UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

SYLLABUS DEL CORSO

Geometria Riemanniana

2526-1-F4002Q012

Obiettivi

1. Conoscenza e capacità di comprensione (Knowledge and understanding)
Al termine del corso, gli studenti e le studentesse avranno acquisito una solida conoscenza dei fondamenti della geometria Riemanniana classica, incluse le nozioni di metrica riemanniana, connessione di Levi-Civita, geodetiche e curvatura. Sapranno comprendere il legame tra struttura locale (differenziale) e forma globale (topologica) delle varietà riemanniane.

2. Conoscenza e capacità di comprensione applicate (Applying knowledge and understanding)
Gli studenti e le studentesse saranno in grado di applicare le nozioni apprese a esempi concreti, verificando le proprietà geometriche delle varietà riemanniane. Sapranno calcolare geodetiche, curvature e analizzare esempi significativi come sfere, spazi iperbolici, prodotti (deformati), e varietà modello.

3. Autonomia di giudizio (Making judgements)
Il corso mira a sviluppare la capacità di analizzare criticamente le strutture geometriche studiate, formulando giudizi autonomi sulla validità delle proprietà e dei risultati appresi. Gli studenti saranno stimolati a riflettere sul significato geometrico dei concetti teorici e sulla loro interazione con la topologia delle varietà.

4. Abilità comunicative (Communication skills)
Attraverso discussioni teoriche, e verifiche lasciate da svolgere a casa, gli studenti saranno incoraggiati a esprimere in modo chiaro e rigoroso i concetti della geometria Riemanniana, sia in forma scritta che orale. Saranno in grado di presentare dimostrazioni, esempi e argomentazioni logico-matematiche in modo efficace.

5. Capacità di apprendere (Learning skills)
Il corso fornirà gli strumenti teorici e metodologici per affrontare in autonomia lo studio di sviluppi avanzati della geometria Riemanniana. Gli studenti saranno in grado di approfondire argomenti non trattati esplicitamente a lezione, completando dimostrazioni, consultando testi specialistici e integrando le conoscenze in un percorso di apprendimento continuo.

Contenuti sintetici

Al fine di fornire il supporto intuitivo necessario per affrontare lo studio delle varietà Riemanniane, il corso prenderà le mosse da alcuni aspetti introduttivi sulla teoria classica locale e globale delle superfici regolari nello spazio Euclideo tridimensionale. Quindi, partendo dal problema dell'esistenza di una metrica Riemanniana su una generica varietà differenziale, si passerà alla nozione di derivazione di Levi-Civita, e di corrispondente trasporto parallelo, che consentirà di definire il concetto di curva geodetica come curva ad accelerazione nulla. Attraverso la lunghezza di curve, verrà introdotta una distanza intrinseca che indurrà la topologia della varietà soggiacente e, di qui, si entrerà negli aspetti globali delle geodetiche che si concretizzeranno nella nozione di completezza e nelle sue caratterizzazioni metriche (Teorema di Hopf-Rinow). Lo studio del tensore di curvatura di Riemann e delle sue tracce precederà la parte culminante del corso che, tempo permettendo, sarà dedicata al legame tra il segno della curvatura e la topologia di una varietà Riemanniana completa.

Programma esteso

1. Cenno alle superfici regolari nello spazio Euclideo e alle loro curvature
2. Definizione ed esistenza delle metriche Riemanniane
3. Connessione di Levi-Civita e trasporto parallelo
4. Geodetiche e mappa esponenziale
5. La struttura metrica intrinseca di una varietà Riemanniana
6. Le curvature di una varietà Riemanniana
7. Campi di Jacobi e punti coniugati
8. Risultati globali
   8.1) Teoria globale delle geodetiche e completezza
   8.2) Il Teorema di Bonnet-Myers
   8.3) (tempo permettendo) Il Teorema di Cartan-Hadamard

Prerequisiti

Calcolo differenziale in più variabili, nozioni di base sulle varietà differenziabili, algebra lineare e multilineare.

Modalità didattica

56 ore svolte in modalità erogativa, in presenza (8 cfu).

Le lezioni si svolgono in italiano, e ove necessario, in inglese.

Materiale didattico

Testi per la parte introduttiva sulla teoria delle superfici

M. P. do Carmo, *Differential geometry of curves & surfaces*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.

M. Abate; F. Tovena, *Curves and surfaces*. Unitext, 55 Springer, Milan, 2012.

Testi di base sulla Geometria Riemanniana

M. P. do Carmo *Riemannian geometry*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.

Lee, John M. *Introduction to Riemannian manifolds*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 176. Springer, Cham, 2018.

Ulteriore materiale didattico (come le note delle lezioni) verrà fornito durante il corso

Testi per approfondimenti

S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine *Riemannian geometry*. Third edition. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

P. Petersen, *Riemannian Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 171. Springer, 2006.

T. Sakai, *Riemannian geometry*. Transl. Math. Monogr., 149 American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Secondo semestre

Modalità di verifica del profitto e valutazione

La verifica dell’apprendimento avviene attraverso un esame orale tradizionale, durante il quale studentesse e studenti dovranno mostrare di aver acquisito le nozioni di base, le dimostrazioni dei principali teoremi, e la capacità di analisi e di calcolo su alcuni esempi concreti. Gli aspetti introduttivi sulla geometria delle superfici Euclidee non saranno oggetto di verifica. A loro scelta, studentesse e studenti potranno cominciare l'esame con un breve seminario di approfondimento su un tema non trattato durante il corso.

Orario di ricevimento

Su appuntamento

Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÁ