



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

## SYLLABUS DEL CORSO

### Stochastic Calculus and Finance

2526-1-F4002Q027

---

#### Obiettivi

Obiettivi formativi (Descrittori di Dublino):

Al termine del corso, lo studente avrà raggiunto i seguenti risultati di apprendimento:

- 1. Conoscenza e capacità di comprensione.** Lo studente acquisirà una conoscenza avanzata del calcolo stocastico, con particolare riferimento al moto browniano, alle equazioni differenziali stocastiche (SDE) e alle loro connessioni con le equazioni alle derivate parziali (PDE), nonché alle applicazioni alla modellizzazione matematica dei mercati finanziari.
- 2. Capacità di applicare conoscenza e comprensione.** Lo studente sarà in grado di applicare il quadro teorico del calcolo stocastico alla formulazione e all'analisi di modelli matematici per fenomeni stocastici, incluse applicazioni alle equazioni alle derivate parziali e a problemi di finanza matematica.
- 3. Autonomia di giudizio.** Lo studente svilupperà la capacità di valutare criticamente l'applicabilità dei modelli e delle tecniche stocastiche in diversi contesti.
- 4. Abilità comunicative.** Lo studente acquisirà la capacità di comunicare in modo chiaro e rigoroso argomentazioni, dimostrazioni e risultati relativi al calcolo stocastico, utilizzando una terminologia appropriata e un linguaggio matematico formale.
- 5. Capacità di apprendimento.** Lo studente svilupperà gli strumenti metodologici e l'autonomia necessari per intraprendere studi e attività di ricerca più avanzati nell'ambito dell'analisi stocastica, delle equazioni alle derivate parziali (stocastiche), della finanza matematica o in settori affini.

#### Contenuti sintetici

- Introduzione ai processi stocastici a tempo continuo
- Il moto Browniano
- Nozioni di base sui processi di Levy
- L'integrale stocastico di Ito
- La formula di Ito
- Equazioni differenziali stocastiche
- L'operatore differenziale di Kolmogorov e la formula di Feynman-Kac
- Cenni sui mercati finanziari a tempo continuo
- La formula di Black e Scholes e il pricing di opzioni europee

## Programma esteso

**Il moto browniano.** Processi stocastici, spazio delle traiettorie, insiemi cilindrici, sigma-algebra prodotto. Legge di un processo stocastico e leggi finito-dimensionali. Vettori aleatori normali. Processi stocastici gaussiani. Definizione di moto browniano (MB). Costruzione del MB a partire dal Teorema di esistenza di Daniell-Kolmogorov e utilizzando il Teorema di continuità di Kolmogorov. Caratterizzazione del MB come processo gaussiano. Proprietà di invarianza del MB (riflessione spaziale, traslazione e riflessione temporale, riscaldamento diffusivo, inversione temporale). MB rispetto a una filtrazione. Proprietà delle traiettorie del MB: non differenziabilità. Variazione quadratica del MB. Legge del Logaritmo iterato. MB in dimensione  $d$ .

**Processi di Lévy.** Generalità sulle filtrazioni  $(F_t)$  indizzate da un insieme continuo. Filtrazione naturale di un processo stocastico, processi adattati a una filtrazione. Continuità a destra e completezza per una filtrazione (definizione di  $F_{t+}$ ), ampliamento standard. Processi di Lévy rispetto a una filtrazione. Esempi: processo di Poisson, processo di Poisson composto. Un processo di Lévy rispetto a una filtrazione  $(F_t)$  è indipendente da  $F_0$ . Legge 0-1 di Blumenthal. Tempi d'arresto e proprietà di Markov forte.

**L'integrale di Ito.** Modificazione e indistinguibilità per processi stocastici. Continuità e misurabilità per processi stocastici. La sigma algebra degli eventi antecedenti a un tempo d'arresto. Martingale a tempo continuo, esempi, modificazioni continue da destra, teorema d'arresto e disuguaglianza massimale. Processi progressivamente misurabili. L'integrale di Ito per i processi semplici. L'estensione a  $M^2$  e a  $M^2_{loc}$ . Proprietà: località, esistenza della versione a traiettorie continue, proprietà di martingala. Variazione quadratica. Somma di Riemann per l'integrale di Ito di processi a traiettorie continue. Martingale locali.

**La formula di Ito.** La formula di Ito per il MB. Processi di Ito. Formula di Ito per processi di Ito generali. Applicazione della formula di Ito, Moto browniano geometrico e supermartingala esponenziale. La formula di Ito nel caso multidimensionale. Funzioni armoniche e problema di Dirichlet. Il Teorema di Girsanov. Il Teorema di rappresentazione delle martingale browniane.

**Equazioni differenziali stocastiche.** Esistenza forte e debole, unicità pathwise e in legge. Esistenza forte e unicità pathwise sotto ipotesi Lipschitz. Esempio: il processo di Ornstein-Ühlenbeck. Il semigrupp di Kolmogorov. L'equazione alle derivate parziali di Kolmogorov. La formula di Feynman-Kac.

**Applicazione ai mercati finanziari.** Sottostanti, opzioni call e put, loro valore (payoff) e significato. Pricing di un'opzione mediante copertura (hedging). Modello di mercato finanziario a tempo continuo basato su un titolo non rischioso (bond) e  $d$  titoli rischiosi (stocks) guidati da  $d$  MB indipendenti. Misura martingala locale equivalente. Strategie di investimento autofinanziati e strategie ammissibili. Teorema di assenza di arbitraggio. Pricing e copertura di opzioni europee. Il modello di Black&Scholes (unidimensionale, con tasso d'interesse, drift e volatilità costanti). Formula esplicita per il prezzo delle opzioni call. Un modello di mercato finanziario markoviano con drift e volatilità dipendenti dal tempo e del sottostante (volatilità locale). Formula di rappresentazione per il prezzo delle opzioni Europee e per la strategia di copertura.

## Prerequisiti

Calcolo delle probabilità con teoria della misura. Processi stocastici a tempo discreto. Proprietà di base degli spazi di Hilbert e degli spazi  $L^p$ .

## Modalità didattica

Lezioni da 2 ore svolte in modalità erogativa in presenza

## Materiale didattico

Dispense del docente

Libro **Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus** di Jean-François Le Gall, Springer series Graduate Texts in Mathematics (Volume 274, 2016)

## Periodo di erogazione dell'insegnamento

Primo semestre

## Modalità di verifica del profitto e valutazione

Esame orale, con una eventuale parte scritta preliminare, cui viene valutata la conoscenza e la capacità dello studente di discutere criticamente le definizioni, gli enunciati, gli esempi e le dimostrazioni presentati durante il corso.

## Orario di ricevimento

Su appuntamento

## Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÀ

---