

SYLLABUS DEL CORSO

Mathematical Methods for Economic Analysis - Optimal Control

2526-1-F4002Q016

Obiettivi

Obiettivi formativi secondo i Descrittori di Dublino:

Conoscenza e capacità di comprensione

Lo studente acquisirà una solida comprensione teorica riguardanti le definizioni e gli enunciati fondamentali del controllo ottimo sia con la tecnica variazionale che con la programmazione dinamica. Questi strumenti poi verranno applicati alla teoria dei giochi differenziali. Verranno altresì fornite le *competenze* necessarie a comprendere e analizzare le principali tecniche e metodi dimostrativi connessi alla teoria, e le *abilità* utili ad applicarle per risolvere esercizi e affrontare modelli economici e non.

Conoscenza e capacità di comprensione applicate

Lo studente sarà in grado di applicare le conoscenze acquisite alla modellizzazione e alla risoluzione di problemi concreti in ambito matematico, in particolare a contesti legati all'analisi economica. Sarà in grado di sviluppare dimostrazioni rigorose e costruire esempi significativi, anche in ambito interdisciplinare.

Autonomia di giudizio

Attraverso la riflessione sui contenuti teorici e pratici del corso, lo studente svilupperà capacità logiche e critiche nell'analisi di problemi in diversi contesti applicativi, in particolare di tipo economico.

Abilità comunicative

Lo studente sarà in grado di comunicare in modo chiaro, preciso e coerente i contenuti matematici del corso in forma scritta e orale. Saprà presentare argomentazioni teoriche e discutere applicazioni in ambiti matematici e scientifici affini, anche a interlocutori non specialisti.

Capacità di apprendimento

Il corso contribuirà a sviluppare la capacità di apprendimento autonomo, favorendo l'acquisizione di strumenti concettuali e tecnici che lo studente potrà impiegare nell'approfondimento individuale e nella preparazione della tesi magistrale.

Contenuti sintetici

Problemi di controllo ottimo con il metodo variazionale: teoria e modelli economici. Problemi di controllo ottimo con la programmazione dinamica: teoria e modelli economici. Introduzione ai giochi differenziali.

Programma esteso

1. INTRODUZIONE AL CONTROLLO OTTIMO

- a. **Alcuni problemi introduttivi** In barca con Pontryagin, un modello di consumo ottimo, "*the lady in the lake*".
- b. **Formulazione di un problema di controllo ottimo** Definizioni di controlli, dinamica, traiettorie, insieme di controllo, target set.

Funzioni assolutamente continue. Soluzione di una equazione differenziale ordinaria con funzioni misurabili: definizione e teorema di esistenza e unicità. Controlli ammissibili. Importanza del caso della dinamica lineare. Insieme dei punti raggiungibili.

2. IL CONTROLLO OTTIMO CON METODO VARIAZIONALE

- a. **Il problema più semplice di controllo ottimo** Il teorema di Pontryagin (DIM nel caso di insieme di controllo $U=R$, DIM anche del lemma tecnico): definizione di Hamiltoniana e conseguenze del principio del Massimo. Controllo estremale, moltiplicatore associato. Controllo normale e abnormale: un esempio di controllo ottimo abnormale. Proprietà dell'Hamiltoniana lungo il cammino ottimo (DIM).

Problemi autonomi: proprietà dell'Hamiltoniana lungo il cammino ottimo.

Condizioni sufficienti di ottimalità: la condizione di Mangasarian (DIM). Funzioni concave, sopragradiente, sopragradienti di funzioni differenziabili, cenni al Teorema di Rockafellar: la condizione sufficiente di Arrow (DIM). Condizioni di transversalità per i problemi con punti iniziali/finali fissati. Sui problemi di minimo.

A two sector model with investment and consumption goods.

- b. **Il problema più semplice di calcolo delle variazioni** Il teorema di Eulero (DIM come caso particolare del teorema di Pontryagin). Condizioni di transversalità per i problemi con punti iniziali/finali fissati. Condizioni sufficienti per il problema più semplice usando concavità/convessità.

Curva di lunghezza minima.

- c. **Controlli singolari e bang-bang** Definizioni di controlli bang-bang, istanti di commutazione e controlli singolari. *La costruzione di una strada di montagna a costo minimo.*

d. **Problema più generali di controllo ottimo** Problemi di Mayer, di Bolza e Lagrange: loro equivalenza (DIM). Problemi a tempo finale fisso: condizione necessaria e condizione sufficiente per il problema di Bolza, problemi autonomi. Problemi a tempo finale libero: nozione di tempo di uscita, condizione necessaria per il problema di Bolza, problemi autonomi.

Problemi di time optimal: condizione necessaria. *In barca con Pontryagin.* Problemi di time optimal singolari: *the Dubins car.*

Problemi ad orizzonte infinito: controesempio di Halkin; condizione sufficiente (DIM). Hamiltoniana corrente e moltiplicatore corrente e loro condizioni necessarie (DIM) e sufficienti. *Modelli di crescita economica: preferenze, funzioni di utilità: un modello di consumo ottimo con utilità logaritmica.*

- e. **Problemi di esistenza e controllabilità** Esempi di classe di controlli vuota o di classe di controlli non vuota e senza controllo ottimo (controesempio di Bolza). Disuguaglianza di Gronwall (DIM). Teorema di esistenza del controllo ottimo per i problemi di Bolza: il caso con insieme di controllo chiuso e il caso con insieme controllo compatto.

3. CONTROLLO OTTIMO CON IL METODO DELLA PROGRAMMAZIONE DINAMICA

- a. **La funzione valore e le sue proprietà per il problema più semplice di controllo ottimo.** Definizione della funzione valore. Il principio di ottimalità di Bellman (DIM).

Le proprietà della funzione valore: la condizione (necessaria) finale sulla funzione valore (DIM), l'equazione di

Bellmann-Hamilton-Jacobi (BHJ) per funzioni valori differenziabili (DIM). L'Hamiltoniana della Programmazione Dinamica. Condizioni sufficienti di ottimalità (DIM). L'equazione di BHJ lungo la traiettoria ottima. Sui problemi di minimo.

Soluzione del problema di strategia aziendale di produzione/vendita. Problemi Affini-Quadratici e Lineari-Quadratici-omogenei: loro funzione valore. Equazioni differenziali di Riccati.

La funzione valore del problema a tempo finale fisso e valore finale libero (sotto opportune ipotesi), è Lipschitz (DIM per problemi autonomi). Cenni al teorema di Rademacher: la funzione valore ammette derivate q.o.

Definizione di soluzione viscosa per l'equazione di BHJ; la funzione valore come unica soluzione viscosa per l'equazione di BHJ; un esempio di problema di controllo ottimo la cui funzione valore è soluzione viscosa per l'equazione di BHJ.

b. Problemi più generali di controllo ottimo. Condizioni necessarie e sufficienti per problemi di controllo ottimo più generali.

Modello di produzione e gestione del magazzino. Problemi autonomi, ad orizzonte illimitato: la sua funzione valore corrente e la relativa equazione di BHJ (DIM). *Un modello di consumo ottimo con utilità HARA.* Cenni al modello stocastico di Merton.

c. Legami tra i metodi variazionali e la Programmazione Dinamica.

Interpretazione del moltiplicatore come prezzo ombra (DIM).

4. GIOCHI DIFFERENZIALI

a. Nozioni introduttive Formulazione di un gioco differenziale a 2 giocatori. Giochi simmetrici, giochi completamente cooperativi, giochi a somma zero. Concetti di soluzioni: equilibrio di Nash, equilibrio di Stackelberg. Tipi di strategie: a ciclo aperto e feedback.

b. Soluzioni di equilibrio di Nash *Strategie open loop. Uso dell'approccio variazionale: condizioni necessarie e sufficienti per avere un equilibrio di Nash open-loop. *Il modello lavoratori-capitalisti di Lancaster.* **Strategie feedback. Perché la tecnica variazione non è particolarmente utile (DIM). Definizione di funzione valore su un equilibrio di Nash feedback. Condizioni necessarie e sufficienti con l'uso della programmazione dinamica per un equilibrio di Nash feedback. Le funzioni valore per problemi giochi differenziali Affini-Quadratici a due giocatori. La funzione valore corrente per giochi a orizzonte infinito e scontati. *Un problema di produzione per due aziende in competizione.*

c. Soluzioni di equilibrio di Stackelberg Giocatore leader e giocatore gregario, insieme di miglior risposta. Ricerca di soluzioni open-loop con l'approccio variazionale. *Padre e figlio al lago.*

d. Giochi a somma zero Equilibrio di Nash come punto di sella. Insieme dei controlli e insieme delle strategie non anticipative: esempio della strategia non anticipativa costante.

Definizione di funzione valore inferiore V^- , funzione valore superiore V^+ e loro relazione; un esempio di gioco con $V^- > V^+*$. Definizione di funzione valore V .

Hamiltoniana inferiore della Programmazione Dinamica H^-PD (superiore H^+PD): $H^-PD \geq H^+PD$ (DIM); un esempio di gioco con $H^-PD < H^+PD$. Condizione di Isaacs (o di minimax) e definizione di Hamiltoniana della Programmazione Dinamica HPD .

Risultati con funzioni valore regolari. *Equazione di Isaacs inferiore e superiore:* V^- (V^+) è soluzione dell'equazione di Isaacs superiore (inferiore). Una dimostrazione geometrica che V soddisfa l'equazione di Isaacs (DIM).

Equazioni di Isaacs per V e condizioni sufficienti con la PD per un equilibrio di Nash con strategia feedback. Condizioni necessarie e sufficienti con approccio variazionale con strategia open-loop

Risultati per funzioni valore in generale. V^- (V^+) è Lipschitz (sotto opportune ipotesi). V^- (V^+) è l'unica soluzione viscosa dell'equazione di Isaacs inferiore (superiore). La condizione di Isaacs implica $V^- = V^+ = V$. War of attrition and attack*

e. Giochi di cattura ed evasione Formulazione di un gioco di cattura-evasione, target set, exit time. La funzione valore e l'equazione di Isaacs per problemi autonomi (DIM). *Lady in the lake.*

Prerequisiti

Le conoscenze acquisite nei corsi della laurea triennale sono una base sufficiente.

Modalità didattica

Normalmente, lezioni frontali con esercitazioni: 56 ore di lezione svolte in modalità erogativa, in presenza (8 cfu). Il corso è previsto in lingua italiana, ma potrebbe essere tenuto in lingua inglese in presenza di studenti stranieri.

Materiale didattico

- [C1] A. Calogero "*Notes on optimal control theory*", disponibile gratuitamente in rete.
- [C2] A. Calogero "*A very short tour on differential games*", disponibile gratuitamente in rete.
- [C3] A. Calogero "*Exercises of dynamic optimization*", disponibile gratuitamente in rete.

Ulteriore materiale didattico:

- [BO] T. Ba?ar, G.O. Olsder "*Dynamic noncooperative game theory*", SIAM Classic in Applied Mathematics, 1998
- [B] A. Bressan "*Noncooperative differential games. A Tutorial*", Milan Journal of Mathematics, vol 79, pag 357-427, 2011.
- [E] L.C. Evans "*An introduction to mathematical optimal control theory*", disponibile gratuitamente in rete.
- [FR] W.H. Fleming, R.W. Rishel "*Deterministic and stochastic optimal control*", Springer-Verlag, 1975
- [KS] M.I. Kamien, N.L. Schwartz "*Dynamic optimization*" Elsevier, second edition, 2006
- [SS] A. Seierstad, K Sydsæter "*Optimal control theory with economics applications*" Elsevier Science, 1987

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Primo semestre

Modalità di verifica del profitto e valutazione

L'esame consiste in una prova scritta e una prova orale facoltativa.

PROVA SCRITTA (3 ore, a cui è necessario iscriversi) consiste in una prova sui seguenti argomenti:

- definizioni, teoremi, dimostrazioni (le dimostrazioni sono indicate con DIM) come da programma dettagliato;
- modelli economici e non, come da programma dettagliato;
- esercizi di controllo ottimo con metodo variazionale e con la programmazione dinamica.
Gli esercizi dell'esame scritto verranno scelti rigorosamente dalla lista [C3] presente sulla pagina del corso (escludendo gli esercizi del punto 1.8): si consiglia di verificare periodicamente la lista.

PROVA ORALE (in data da concordare, ma entro un anno dalla prova scritta) è un approfondimento dell'elaborato scritto.

E' facoltà dello studente rifiutare il voto finale e ripetere la prova d'esame, per non più di 2 volte.

Orario di ricevimento

Su appuntamento con il docente.

Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÁ
