UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

# SYLLABUS DEL CORSO

# Mathematical Methods for Economic Analysis - Optimal Control

**2526-1-F4002Q016**

## Obiettivi

**Obiettivi formativi secondo i Descrittori di Dublino:**

**Conoscenza e capacità di comprensione**
Lo studente acquisirà una solida comprensione teorica riguardanti le definizioni e gli enunciati fondamentali del controllo ottimo sia con la tecnica variazionale che con la programmazione dinamica. Questi strumenti poi verranno applicati alla teoria dei giochi differenziali. Verranno altresì fornite le *competenze* necessarie a comprendere e analizzare le principali tecniche e metodi dimostrativi connessi alla teoria, e le *abilità* utili ad applicarle per risolvere esercizi e affrontare modelli economici e non.

**Conoscenza e capacità di comprensione applicate**
Lo studente sarà in grado di applicare le conoscenze acquisite alla modellizzazione e alla risoluzione di problemi concreti in ambito matematico, in particolare a contesti legati all'analisi economica. Sarà in grado di sviluppare dimostrazioni rigorose e costruire esempi significativi, anche in ambito interdisciplinare.

**Autonomia di giudizio**
Attraverso la riflessione sui contenuti teorici e pratici del corso, lo studente svilupperà capacità logiche e critiche nell'analisi di problemi in diversi contesti applicativi, in particolare di tipo economico.

**Abilità comunicative**
Lo studente sarà in grado di comunicare in modo chiaro, preciso e coerente i contenuti matematici del corso in forma scritta e orale. Saprà presentare argomentazioni teoriche e discutere applicazioni in ambiti matematici e scientifici affini, anche a interlocutori non specialisti.

**Capacità di apprendimento**
Il corso contribuirà a sviluppare la capacità di apprendimento autonomo, favorendo l'acquisizione di strumenti concettuali e tecnici che lo studente potrà impiegare nell'approfondimento individuale e nella preparazione della tesi magistrale.

## Contenuti sintetici

Problemi di controllo ottimo con il metodo variazionale: teoria e modelli economici. Problemi di controllo ottimo con la programmazione dinamica: teoria e modelli economici. Introduzione ai giochi differenziali.

## Programma esteso

**1. INTRODUZIONE AL CONTROLLO OTTIMO**

**a. Alcuni problemi introduttivi** In barca con Pontryagin, un modello di consumo ottimo, *"the lady in the lake"*.
**b. Formulazione di un problema di controllo ottimo** Definizioni di controlli, dinamica, traiettorie, insieme di controllo, target set.
Funzioni assolutamente continue. Soluzione di una equazione differenziale ordinaria con funzioni misurabili: definizione e teorema di esistenza e unicità. Controlli ammissibili. Importanza del caso della dinamica lineare. Insieme dei punti raggiungibili.

**2. Il CONTROLLO OTTIMO CON METODO VARIAZIONALE**
**a. Il problema più semplice di controllo ottimo** Il teorema di Pontryagin (DIM nel caso di insieme di controllo U=R, DIM anche del lemma tecnico): definizione di Hamiltoniana e conseguenze del principio del Massimo. Controllo estremale, moltiplicatore associato. Controllo normale e abnormale: un esempio di controllo ottimo abnormale. Proprietà dell'Hamiltoniana lungo il cammino ottimo (DIM).
Problemi autonomi: proprietà dell'Hamiltoniana lungo il cammino ottimo.
Condizioni sufficienti di ottimalità: la condizione di Mangasarian (DIM). Funzioni concave, sopragradiente, sopragradiente di funzioni differenziabili, cenni al Teorema di Rockafellar: la condizione sufficiente di Arrow (DIM).
Condizioni di transversalità per i problemi con punti iniziali/finali fissati. Sui problemi di minimo.
*A two sector model with investment and consumption goods.*
**b. Il problema più semplice di calcolo delle variazioni** Il teorema di Eulero (DIM come caso particolare del teorema di Pontryagin). Condizioni di transversalità per i problemi con punti iniziali/finali fissati. Condizioni sufficienti per il problema più semplice usando concavità/convessità.
*Curva di lunghezza minima.*
**c. Controlli singolari e bang-bang** Definizioni di controlli bang-bang, istanti di commutazione e controlli singolari.
*La costruzione di una strada di montagna a costo minimo.*
**d. Problema più generali di controllo ottimo** Problemi di Mayer, di Bolza e Lagrange: loro equivalenza (DIM).
Problemi a tempo finale fisso: condizione necessaria e condizione sufficiente per il problema di Bolza, problemi autonomi. Problemi a tempo finale libero: nozione di tempo di uscita, condizione necessaria per il problema di Bolza, problemi autonomi.
**Problemi di time optimal**: condizione necessaria. *In barca con Pontryagin.* Problemi di time optimal singolari: *the Dubins car.*
**Problemi ad orizzonte infinito**: controesempio di Halkin; condizione sufficiente (DIM). Hamiltoniana corrente e moltiplicatore corrente e loro condizioni necessarie (DIM) e sufficienti. *Modelli di crescita economica: preferenze, funzioni di utilità: un modello di consumo ottimo con utilità logaritmica.*
**e. Problemi di esistenza e controllabilità** Esempi di classe di controlli vuota o di classe di controlli non vuota e senza controllo ottimo (controesempio di Bolza). Disuguaglianza di Gronwall (DIM). Teorema di esistenza del controllo ottimo per i problemi di Bolza: il caso con insieme di controllo chiuso e il caso con insieme controllo compatto.

**3. CONTROLLO OTTIMO CON IL METODO DELLA PROGRAMMAZIONE DINAMICA**
**a. La funzione valore e le sue proprietà per il problema più semplice di controllo ottimo.** Definizione della funzione valore. Il principio di ottimalità di Bellman (DIM).
Le proprietà della funzione valore: la condizione (necessaria) finale sulla funzione valore (DIM), l'equazione di

Bellmann-Hamilton-Jacobi (BHJ) per funzioni valori differenziabili (DIM). L'Hamiltoniana della Programmazione Dinamica. Condizioni sufficienti di ottimalità (DIM). L'equazione di BHJ lungo la traiettoria ottima. Sui problemi di minimo.
*Soluzione del problema di strategia aziendale di produzione/vendita.* Problemi Affini-Quadratici e Lineari-Quadratici-omogenei: loro funzione valore. Equazioni differenziali di Ricatti.
La funzione valore del problema a tempo finale fisso e valore finale libero (sotto opportune ipotesi), è Lipschitz (DIM per problemi autonomi). Cenni al teorema di Rademacher: la funzione valore ammette derivate q.o.
Definizione di soluzione viscosa per l'equazione di BHJ; la funzione valore come unica soluzione viscosa per l'equazione di BHJ; un esempio di problema di controllo ottimo la cui funzione valore è soluzione viscosa per l'equazione di BHJ.
**b. Problemi più generali di controllo otttimo.** Condizioni necessarie e sufficienti per problemi di controllo ottimo più generali.
*Modello di produzione e gestione del magazzino.* Problemi autonomi, ad orizzonte illimitato: la sua funzione valore corrente e la relativa equazione di BHJ (DIM). *Un modello di consumo ottimo con utilità HARA. Cenni al modello stocastico di Merton.*
**c. Legami tra i metodi variazionali e la Programmazione Dinamica**.
Interpretazione del moltiplicatore come prezzo ombra (DIM).

**4. GIOCHI DIFFERENZIALI**
**a. Nozioni introduttive** Formulazione di un gioco differenziale a 2 giocatori. Giochi simmetrici, giochi completamente cooperativi, giochi a somma zero. Concetti di soluzioni: equilibrio di Nash, equilibrio di Stackelberg. Tipi di strategie: a ciclo aperto e feedback.
**b. Soluzioni di equilibrio di Nash** *Strategie open loop. Uso dell'approccio variazionale: condizioni necessarie e sufficienti per avere un equilibrio di Nash open-loop. *Il modello lavoratori-capitalisti di Lancaster.* **Strategie feedback. Perché la tecnica variazione non è particolarmente utile (DIM). Definizione di funzione valore su un equilibrio di Nash feedback. Condizioni necessarie e sufficienti con l'uso della programmazione dinamica per un equilibrio di Nash feedback. Le funzioni valore per problemi giochi differenziali Affini-Quadratici a due giocatori. La funzioni valore corrente per giochi a orizzonte infinito e scontati. *Un problema di produzione per due aziende in competizione.*
**c. Soluzioni di equilibrio di Stackelberg** Giocatore leader e giocatore gregario, insieme di miglior risposta. Ricerca di soluzioni open-loop con l'approccio variazionale. *Padre e figlio al lago.*
**d. Giochi a somma zero** Equilibrio di Nash come punto di sella. Insieme dei controlli e insieme delle strategia non anticipative: esempio della strategia non anticipativa costante.
Definizione di funzione valore inferiore V? , funzione valore superiore V+ e loro relazione; un esempio di gioco con V? > V?*.* Definizione di funzione valore V.
Hamiltoniana inferiore della Programmazione Dinamica *H*?PD (superiore *H*?PD): *H*?PD*?H*+PD (DIM); un esempio di gioco con *H*?PD*<H*?PD. Condizione di Isaacs (o di minimax) e definizione di Hamiltoniana della Programmazione Dinamica HPD.*
*Risultati con funzioni valore regolari. Equazione di Isaacs inferiore e superiore: V? (V?) è soluzione dell'equazione di Isaacs superiore (inferiore). Una dimostrazione geometrica che V soddisfa l'equazione di Isaacs (DIM).*
*Equazioni di Isaacs per V e condizioni sufficienti con la PD per un equilibrio di Nash con strategia feedback. Condizioni necessarie e sufficienti con approccio variazionale con strategia open-loop*
*Risultati per funzioni valore in generale. V? (V?) è Lipschitz (sotto opportune ipotesi). V? (V?) è l'unica soluzione viscosa dell'equazione di Isaacs inferiore (superiore). La condizione di Issacs implica V?=V?*=V. War of attrition and attack*
**e. Giochi di cattura ed evasione** Formulazione di un gioco di cattura-evasione, target set, exit time. La funzione valore e l'equazione di Isaacs per problemi autonomi (DIM). *Lady in the lake.*

## Prerequisiti

Le conoscenze acquisite nei corsi della laurea triennale sono una base sufficiente.

## Modalità didattica

Normalmente, lezioni frontali con esercitazioni: 56 ore di lezione svolte in modalità erogativa, in presenza (8 cfu).
Il corso è previsto in lingua italiana, ma potrebbe essere tenuto in lingua inglese in presenza di studenti stranieri.

## Materiale didattico

[C1] A. Calogero *“Notes on optimal control theory”,* disponibile gratuitamente in rete.
[C2] A. Calogero *“A very short tour on differential games*”, disponibile gratuitamente in rete.
[C3] A. Calogero “*Exercises of dynamic optimization*”, disponibile gratuitamente in rete.

**Ulteriore materiale didattico:**
[BO] T. Ba?ar, G.O. Olsder “*Dynamic noncooperative game theory*”, SIAM Classic in Applied Mathematics, 1998
[B] A. Bressan “*Noncooperative differential games. A Tutorial*”, Milan Journal of Nathematics, vol 79, pag 357-427, 2011.
[E] L.C. Evans “*An introduction to mathematical optimal control theory”*, disponibile gratuitamente in rete.
[FR] W.H. Fleming, R.W. Rishel *"Deterministic and stochastic optimal control*", Springer-Verlag, 1975
[KS] M.I. Kamien, N.L. Schwartz “*Dynamic optimization*” Elsevier, second edition, 2006
[SS] A. Seierstad, K Sydsæter “*Optimal control theory with economics applications*” Elsevier Science, 1987

## Periodo di erogazione dell'insegnamento

Primo semestre

## Modalità di verifica del profitto e valutazione

L’esame consiste in una prova scritta e una prova orale facoltativa.

**PROVA SCRITTA** (3 ore, a cui è necessario iscriversi) consiste in una prova sui seguenti argomenti:

- definizioni, teoremi, dimostrazioni (le dimostrazioni sono indicate con DIM) come da programma dettagliato;
- modelli economici e non, come da programma dettagliato;
- esercizi di controllo ottimo con metodo variazionale e con la programmazione dinamica.
  Gli esercizi dell’esame scritto verranno scelti rigorosamente dalla lista [C3] presente sulla pagina del corso (escludendo gli esercizi del punto 1.8): si consiglia di verificare periodicamente la lista.

**PROVA ORALE** (in data da concordare, ma entro un anno dalla prova scritta) è un approfondimento dell’elaborato scritto.

E' facoltà dello studente rifiutare il voto finale e ripetere la prova d'esame, per non più di 2 volte.

## Orario di ricevimento

Su appuntamento con il docente.

## Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÁ