UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

SYLLABUS DEL CORSO

Stochastic Methods and Models

2526-1-F4002Q028

Obiettivi

Il corso di "Stochastic Methods and Models" mira a fornire agli studenti una selezione approfondita di metodi, concetti e modelli avanzati della teoria della probabilità e dei processi stocastici, sia da un punto di vista teorico che pratico.

Al termine del corso, gli studenti avranno acquisito i seguenti risultati di apprendimento, espressi secondo i Descrittori di Dublino:

1. Conoscenza e Capacità di Comprensione (Knowledge and understanding):
   Gli studenti avranno una conoscenza approfondita e specialistica dei risultati avanzati della teoria della probabilità (grandi deviazioni), dei processi stocastici (catene di Markov a tempo continuo) e della modellazione stocastica (grafi casuali). Saranno in grado di comprendere e interpretare formalmente concetti complessi legati a eventi rari, processi di Poisson, passeggiate aleatorie e proprietà dei grafi casuali.

2. Capacità di Applicare Conoscenza e Comprensione (Applying knowledge and understanding):
   Gli studenti saranno in grado di applicare le nozioni teoriche avanzate acquisite alla soluzione di esercizi complessi e all'analisi critica di problemi e modelli stocastici in contesti sia accademici che applicativi. Avranno una comprensione operativa del linguaggio della probabilità e padronanza di tecniche di dimostrazione avanzate, come il coupling.

3. Autonomia di Giudizio (Making judgements):
   Gli studenti saranno capaci di formulare giudizi autonomi e critici sulla pertinenza e l'applicabilità di specifici metodi e modelli stocastici per l'analisi di fenomeni complessi. Sapranno valutare la validità delle assunzioni e le implicazioni dei risultati ottenuti da modelli stocastici avanzati.

4. Abilità Comunicative (Communication skills):
   Gli studenti saranno in grado di comunicare in modo chiaro e rigoroso, sia oralmente che per iscritto, concetti complessi, risultati di analisi e dimostrazioni relative a metodi e modelli stocastici, a specialisti e

non specialisti. Il corso, essendo tenuto in inglese, potenzierà ulteriormente queste abilità in un contesto internazionale.

5. Capacità di Apprendimento (Learning skills):
   Gli studenti avranno sviluppato le capacità di apprendimento necessarie per affrontare in autonomia ulteriori studi in ambiti correlati alla probabilità avanzata, ai processi stocastici e alla modellazione matematica, nonché per rimanere aggiornati sugli sviluppi della ricerca scientifica nel settore. Saranno in grado di approfondire argomenti specifici utilizzando testi e risorse avanzate

Contenuti sintetici

L'insegnamento si apre con alcuni risultati di **grandi deviazioni**, teoria che fornisce un quadro che permette di studiare eventi rari su scala esponenziale. Nella seconda parte del corso si approfondiscono le **catene di Markov a tempo discreto** e si introducono le **catene di Markov a tempo continuo**, dando particolare importanza al **Processo di Poisson**, essendo un esempio naturale di processo stocastico a tempo continuo con stati discreti. La terza parte del corso è dedicata ad approfondimenti sulle proprietà delle **passeggiate aleatorie**, un argomento fondamentale e ricco di spunti. L'ultima parte del corso si occupa della **teoria dei grafi aleatori**, un argomento di ricerca che sta ricevendo grande attenzione.

Programma esteso

1. Grandi deviazioni

- Il teorema di Cramér
- Entropia relativa e teorema di Sanov
- Il principio di grandi deviazioni
- Il principio di contrazione e il lemma di Varadhan

2. Catene di Markov a tempo discreto e continuo

- Richiami (irriducibilità, classificazione degli stati)
- Proprietà di Markov forte
- Misure invarianti e convergenza all'equilibrio
- Semigruppi e generatori su spazi numerabili
- Processo di Poisson

3. Passeggiate aleatorie

- Passeggiate aleatorie semplici: Passeggiate aleatorie semplici monodimensionali, Teorema di Polya
- Passeggiate aleatorie su grafi: Problema di Dirichlet, Passeggiate aleatorie in ambiente aleatorio
- Ricorrenza e transienza per catene di Markov numerabili: Funzione di Liapunov e criteri di Foster-Lamperti

4. Grafi aleatori

- Il modello di Erd?s–Rényi
- Soglie nel modello di Erdos-Renyi: Connettività e l'emergere di un componente gigante

Prerequisiti

Le conoscenze, competenze e abilità impartite negli insegnamenti di calcolo delle probabilità e processi stocastici (variabili aleatorie, martingale, legge condizionale) oltre che quelle impartite nei corsi di analisi matematica.

Modalità didattica

Il corso consiste in 56 ore di insegnamento in presenza, basato su lezioni frontali, equivalenti a 8 CFU. È diviso in due componenti principali:

- **Teorico: **con un focus sulla presentazione di definizioni, risultati ed esempi rilevanti.
- **Pratico:** con un focus sulle competenze necessarie per applicare le conoscenze teoriche sia all'analisi dei modelli che alla soluzione degli esercizi.

Il corso sarà condotto in inglese.

Materiale didattico

Appunti delle lezioni del docente.

Testi di riferimento:

- F. den Hollander. *Large Deviations*, Fields Institute Monographs, vol. 14. AMS (2008).
- E. Pardoux. *Markov Processes and Applications: Algorithms, Networks, Genome and Finance*, Wiley (2008).
- Q. Berger, F. Caravenna, P. Dai Pra, *Probabilità: un primo corso attraverso esempi, modelli e applicazioni* (II edizione), Springer (2021).
- T. M. Liggett. *Continous time Markox Processes (An Introduction)*, American Mathematical Society (2010).
- G. Last, M. Penrose. *Lectures on the Poisson Process*, Cambridge University Press (2017).
- S. Asmussen, *Applied Probability and Queues*, Springer (2003).
- R. Durrett. *Probability: theory and examples*. 5th edition (2019). The book can be downloaded for free from his personal webpage https://services.math.duke.edu/~rtd/.
- R. Lyons and Y. Peres, *Probability on Trees and Networks*, Cambridge University Press (2016). The book can be downloaded for free from Lyons homepage https://rdlyons.pages.iu.edu/prbtree/book.pdf.

Periodo di erogazione dell'insegnamento

Secondo semestre

Modalità di verifica del profitto e valutazione

L'esame si articola in due parti: una **consegna di esercizi** svolti in autonomia, che contribuisce per un sesto al voto finale, e una **prova orale**, che contribuisce per cinque sesti al voto finale, espresso in trentesimi.

La **consegna di esercizi** consiste nella risoluzione di alcuni esercizi proposti durante il corso, che lo studente dovrà svolgere in autonomia e consegnare con un anticipo di almeno 5 giorni rispetto alla prova orale, e ha lo scopo di valutare la continuità dell'apprendimento e le abilità pratiche.

La **prova orale** consiste in un colloquio della durata indicativa di 30-60 minuti in cui vengono valutate la conoscenza delle definizioni, enunciati ed esempi presentati durante il corso e la competenza e abilità nell'esposizione di una selezione di argomenti con i dettagli delle dimostrazioni.

Ci saranno 6 appelli d'esame (due a giugno/luglio, uno a settembre, tre a gennaio/febbraio).

Orario di ricevimento

Su appuntamento

Sustainable Development Goals

ISTRUZIONE DI QUALITÁ